



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Aplicações da Mecânica Celeste e Métodos Numéricos no Estudo de Problemas Orbitais

Acadêmico: Kaique Gabriel Boldrin

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 24 de janeiro de 2025



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Aplicações da Mecânica Celeste e Métodos Numéricos no Estudo de Problemas Orbitais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Kaique Gabriel Boldrin

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 24 de janeiro de 2025

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	3
Introdução	4
1 Fundamentação teórica	7
1.1 Breve histórico da astronomia	7
1.2 Leis de Kepler	10
1.3 As Leis de Newton	12
1.3.1 As três leis	12
1.3.2 Lei da Gravitação Universal	13
1.4 Relação Newton-Kepler	15
1.5 Mecânica Celeste	17
1.5.1 Momento linear e angular	17
1.5.2 Trabalho e energia	19
1.5.3 Força Central	21
1.5.4 Potencial efetivo	21
1.5.5 Equação da órbita	22
1.6 Problema de Três Corpos	24
2 Método Numérico e aplicação	27
2.1 Introdução	27
2.2 Aplicação	29
2.2.1 Equação da órbita	29
2.2.2 Problema dos três corpos	30
3 Resultados	31
3.1 Cálculo das Equações das Órbitas Sol-Planeta	32
3.2 Cálculo das Órbitas Sol-Terra-Lua	41
Considerações Finais	45

Agradecimentos

Meu sinceros agradecimentos ao prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira pela orientação que ultrapassa o perímetro universitário, passando concelhos para a vida de uma forma dinâmica e divertida, sendo uma referência ao que possa ser no futuro.

À prof. Dr. Hatsumi Mukai, coordenadora da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, que está sempre disposta a ajudar com imensa paciência.

E, por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer minha família pelo apoio contínuo, principalmente, minha mãe, Sandra, meu avô, José, e minha irmã, Bianca, que sempre batalharam em suas vidas, dando-me boas condições de vida para entrar e completar a universidade.

Agradeço minha namorada, Julia, minha maior companhia na vida. É com ela que divido minhas frustrações, alegrias, indignações, felicidades, fofocas, trabalhos domésticos, comidas, shorts, entre outros, mas principalmente, meu tempo e meu espaço, ou melhor, nosso tempo e nosso espaço, pois sou muito feliz que ela também escolhe dividir a vida dela comigo, dia a dia, todo o dia.

Para a seção de amigos, fico muito feliz pela presença de todos vocês na minha vida. Obrigado por serem esse porto de segurança quando precisar. E, por fim, gostaria de ressaltar alguns nomes (em ordem alfabética para que não tenha problemas), que mesmos quando distantes, sei que, quando próximos, a amizade é a mesma: Gabriel, Gabrielly, Gustavo, José e Nuria.

Resumo

Este trabalho explora a aplicação das leis de Kepler e Newton no contexto da mecânica celeste, destacando sua importância para a compreensão dos movimentos planetários e a interação gravitacional entre corpos celestes. Inspirado pelas abordagens didáticas de Richard Feynman, o estudo combina análises teóricas e métodos numéricos para aprofundar o entendimento das dinâmicas orbitais. Em particular, o método de Runge-Kutta é utilizado para resolver equações diferenciais complexas, como as que surgem no problema dos três corpos, um sistema cuja natureza caótica impede soluções analíticas gerais. Além disso, o trabalho traça a evolução histórica dos conceitos astronômicos, desde os modelos heliocêntricos de Copérnico até a formulação da gravitação universal por Newton, destacando a relação intrínseca entre essas teorias. São utilizados dados observacionais, como aqueles disponibilizados pela NASA, para validar os cálculos e compará-los com as previsões teóricas. Essa abordagem permite identificar não apenas os sucessos desses modelos, mas também suas limitações, especialmente quando aplicados a sistemas mais complexos ou de maior escala, onde correções relativísticas podem ser necessárias. Finalmente, o estudo busca não apenas demonstrar a aplicabilidade prática das leis clássicas, mas também oferecer uma visão didática e acessível, auxiliando estudantes e pesquisadores na compreensão de conceitos fundamentais da mecânica celeste e dos desafios associados ao uso de métodos numéricos em problemas dinâmicos.

Palavras chave: mecânica celeste, problema dos três corpos, método de Runge-Kutta.

Introdução

O presente trabalho é inspirado pelas abordagens didáticas de Richard Feynman, particularmente em seu livro "Feynman Lectures on Physics, Volume 1 (Lições de Física de Feynman, Volume 1)" [1]. Feynman aborda tópicos fundamentais, como as Leis de Newton, a gravitação universal, e o movimento orbital, relacionando-os de forma clara às Leis de Kepler. Além disso, sua explicação do experimento mental do canhão de Newton e a ênfase na conservação de energia e momento angular forneceram a base conceitual para explorar os sistemas dinâmicos estudados neste trabalho. Assim como Feynman, busca-se apresentar neste trabalho os conceitos de forma acessível, aliando análises teóricas e métodos numéricos para compreender fenômenos complexos, como o problema dos três corpos.

Baseando-se no heliocentrismo de Nicolau Copérnico [2], Kepler pôde analisar as órbitas planetárias para chegar a conclusões inovadoras. Por exemplo, verificou-se que as órbitas dos planetas não possuem uma órbita circular ao redor do Sol, mas sim, uma órbita elíptica, onde a estrela é um dos focos da elipse [3], conforme demonstra a Figura .

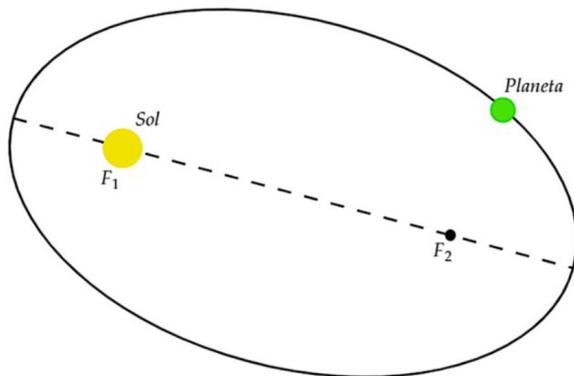


Figura 1: Representação esquemática da órbita elíptica de um planeta em torno do Sol, com o Sol localizado em um dos focos da elipse. Fonte [4].

Esse fenômeno foi descrito junto com outros dois, de modo que ficou conhecido como as três leis de Kepler. A Primeira Lei de Kepler, ou a Lei das Órbitas, descreve justamente as órbitas elípticas. A Segunda Lei de Kepler, ou Lei das Áreas, descrita pela equação

$$\Delta_t = k\Delta_A \quad (1)$$

em que Δ_t é a variação de tempo, k é uma constante, e Δ_A é a variação de área, descreve que o segmento que se dá entre o Sol e qualquer planeta, percorre mesma área num mesmo período.

Por fim, também verificou-se um fenômeno muito interessante, na qual o cubo do raio médio da órbita de um planeta é proporcional ao quadrado do período de translação do

mesmo. Essa é a Terceira Lei de Kepler, ou a Lei dos Períodos. Com essa lei pode-se obter uma previsão do período orbital, o que contribuiu para o desenvolvimento da astronomia para a compreensão da mecânica celeste.

Além de Kepler e suas três leis, Newton também foi um cientista famoso de grande impacto do mesmo século [5] na qual também compilou três fenômenos físicos em leis e estudou os efeitos universais da gravidade [6]. A Primeira Lei de Newton, ou Lei da Inércia, descreve os princípios da inércia, onde um corpo tem a tendência de permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme até que uma força seja aplicada no mesmo para que mude o estado.

A Segunda Lei de Newton, ou a Lei Fundamental da Dinâmica, descreve que a aceleração de um corpo é diretamente proporcional a força aplicada e inversamente proporcional a massa do mesmo, como escrita na equação

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}, \quad (2)$$

em que \vec{F} é a força, m é a massa, e a é a aceleração, lei essa fundamental para estudar o movimento do objeto, assim como as interações de diversas fontes de força.

E, por último, a Terceira Lei de Newton, ou a lei de ação e reação, demonstra que para toda ação, há uma reação de mesma intensidade no sentido oposto. Este princípio pode ser compreendido com a dinâmica do funcionamento do foguete, onde o foguete injeta uma quantidade enorme de massa para trás, para que o foguete possa ir para frente (ou para cima, uma vez que apontado aos céus), conforme mostra a Figura 2.



Figura 2: Teste de lançamento do foguete Angara-A5, ilustrando o princípio de ação e reação de Newton, onde a força gerada pela combustão direcionada para baixo impulsiona o foguete para cima. Fonte: [7].

Por fim, Newton também foi responsável pela “criação” da lei da gravidade universal [6], conhecida comumente pela equação

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (3)$$

em que F é a força, r é o raio de interação entre os corpos, G é a constante universal gravitacional, m_1 e m_2 são as massas de cada corpo. Assim, percebeu-se que as leis que atuavam na Terra para que a famosa maçã pudesse cair no chão (uma vez que não caiu em sua cabeça) [8], também pudesse atrair os planetas ao redor do Sol.

Os pontos abordados até o momento se correlacionam na mecânica celeste. Com a lei da gravitação universal pode-se verificar que a força gravitacional é inversamente

proporcional ao quadrado da distância o que leva os planetas a terem uma órbita elíptica. A Segunda Lei de Kepler é uma resultante da conservação do momento angular, também como resultado da gravidade. E, Newton derivou da Terceira Lei de Kepler [5] e mostrou que a relação de proporcionalidade surge naturalmente considerando as massas envolvidas resultando na equação

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (4)$$

em que T é o período de uma translação, G a constante universal gravitacional, M é a massas do corpo maior e r é o raio referente à distância de um corpo ao outro.

Todavia, esses problemas trazem uma interação essencialmente entre Sol e um planeta, ou de forma mais generalizada, entre um corpo de massa muito maior que a do outro corpo, de modo a ignorar todos os demais elementos do sistema solar. Uma vez incorporado mais um corpo na interação, assim conhecido com o problema dos três corpos, a interação se torna caótica, de modo que pequenas alterações iniciais levam a resultados discrepantes [9]. Dessa forma, utilizar métodos numéricos para encontrar relações aproximativas são essenciais para entender melhor as configurações do problema de três corpos, que também será incluída neste trabalho.

Esses mesmos pontos possuem sua física bem construída e é de grande importância estudá-la e compreendê-la para verificar aplicações da mesma na vida real, no universo, e também, para que possamos avaliá-la, verificando quais tópicos são bem estruturados e utilizados pela comunidade científica para verificar dados experimentais, e quais possuem suas limitações, na qual necessitam de correções mais complexas e modernas para alcançar um resultado mais preciso, como a relatividade geral [10].

Para tal, diferente de Feynman que trouxe com uma abordagem didática, o objetivo desse trabalho é trazer uma abordagem com foco no método numérico, de modo a trazer a construção das equações, mas de principalmente usá-las com os dados observacionais, e assim, tentar chegar em resultados numéricos similares com a realidade a partir da comparação dos resultados com bancos de dados científicos, como da Nasa [11], e quando não, identificar quais as limitações das equações, e quais correções precisam ser feitas para alcançar um melhor resultado.

No [Capítulo 1](#) é abordado toda a fundamentação teórica para a compreensão deste trabalho, partindo de uma construção histórica acerca da mecânica celeste, passando por Aristóteles, Ptolomeu, Tycho Brahe, e chegando até Kepler e Newton, principais referências desse tema. Além disso, é abordado conceitos chaves a respeito da mecânica celeste, como momento linear, momento angular, trabalho, entre outros. E por fim, também é abordado o problema dos três corpos, com introdução histórica, mostrando a complexidade do tema, juntamente com a manipulação da equação da força gravitacional para a inclusão de um terceiro corpo. Já o [Capítulo 2](#) é focado exclusivamente no método numérico de Runge-Kutta, com introdução a respeito do método, explicando a origem e a construção do mesmo. Além disso, é feito a discretização das equações que serão calculadas, sendo elas a equação do movimento radial, da conservação de energia mecânica, equação da órbita e as equações dos problemas de três corpos. No capítulo [Capítulo 3](#) são apresentados as tabelas e gráficos acerca dos resultados, mostrando os valores calculados e as comparações com os valores da literatura. E por fim, são apresentadas algumas [Considerações Finais](#) a respeito dos resultados, comentando sobre as equivalências e discrepâncias, e perspectivas para o futuro acerca deste trabalho.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

1.1 Breve histórico da astronomia

Desde quando se há registros escritos, houve tentativas de compreender o universo [12]. Em tempos antigos, filosofia, teologia, física, química e astronomia se misturavam na busca por explicações lógicas. À medida que as sociedades se tornaram mais estáveis e as preocupações com a sobrevivência diminuíram, algumas pessoas começaram a dedicar suas vidas a entender os fenômenos naturais.

Os primeiros registros relevantes mostram que os gregos e os mesopotâmicos foram pioneiros nesse campo [13], propondo hipóteses baseadas em conceitos abstratos, procurando a perfeição, uma vez que a natureza seria uma materialização divina. Embora muitas dessas ideias não descrevessem corretamente a natureza, abriram caminho para avanços futuros. Por exemplo, antes de Galileu propor a inércia no século XVII, Aristóteles propôs que um objeto em movimento precisaria de uma força contínua para se manter em movimento, como uma flecha que precisaria ser sustentada pelo ar.

Porém, houve propostas que, surpreendentemente, conseguiram representar bem a realidade das coisas como se conhece hoje. Por exemplo, Aristarco de Samos [14], no século III a.C., foi pioneiro ao propor que o Sol estava no centro do sistema solar. Ele chegou a essa conclusão observando que, embora o Sol e a Lua parecessem ter o mesmo tamanho no céu, o Sol estava muito mais distante, o que indicava que era significativamente maior.

Esse modelo, em contrapartida ao modelo geocêntrico, seria capaz de explicar o fenômeno conhecido com movimento retrógrado, pois para o modelo geocêntrico não faz sentido que os planetas mudem o sentido do movimento durante a órbita ao redor do referencial, no caso, a Terra. Mas no modelo heliocêntrico, isso ocorre quando a Terra ultrapassa um planeta mais distante do Sol, como Marte, criando a ilusão de movimento retrógrado.

Apesar da simplicidade na explicação, o modelo heliocêntrico foi rejeitado por não ter de evidências diretas, mas não apenas isso, também porque o modelo geocêntrico foi consolidado por Aristóteles [15], e mais tarde, no século II d.C., Ptolomeu refinou este modelo no *Almagesto* [16], introduzindo epiciclos para descrever o movimento retrógrado e outras irregularidades observadas nos céus, demonstrado na Figura [1.1]. Embora matematicamente complexo, seu modelo era consistente com as observações da época e permaneceu dominante por mais de mil anos.

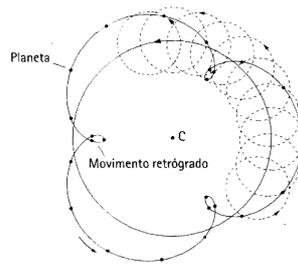
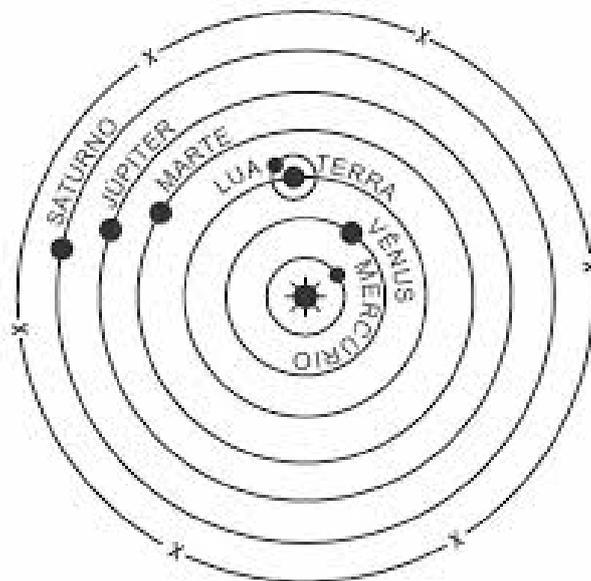


Figura 1.1: Órbita de um planeta ao redor do Sol que estaria localizado no ponto C. A curva tracejada é a representa as órbitas cujo centro percorre a orbita representada pela linha, de modo que a resultante é a linha com pontos, mostrando que no caso dessa órbita, em um período translativo, seria observado o movimento retrógrado três vezes. Fonte: [17]

Em 1543, Nicolau Copérnico revitalizou o modelo heliocêntrico em sua obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* [2]. Ele propôs que os planetas orbitavam o Sol em trajetórias circulares, conforme demonstra Figura 1.2, o que simplificava os cálculos astronômicos e explicava outros fenômenos como os períodos orbitais mais longos de planetas distantes. Apesar disso, Copérnico ainda mantinha algumas influências gregas, como a crença em órbitas perfeitamente circulares. No entanto, a ausência de observações diretas, como a paralaxe estelar, gerou resistência inicial à sua teoria.



ROSA, R. *Astronomia elementar*. Uberlândia: Ed. da Universidade Federal de Uberlândia, 1994.

Figura 1.2: Representação das órbitas planetárias centradas no Sol com formato circular. Fonte [18]

A paralaxe estelar é o aparente deslocamento das estrelas no céu resultante do movimento da Terra em sua órbita ao redor do Sol. Na época de Copérnico, a paralaxe não podia ser observada pois as estrelas estão distantes o suficiente para que os equipamentos

da época fossem incapazes de captar. Foi apenas em 1838, com instrumentos avançados, que Friedrich Bessel mediu a paralaxe da estrela 61 Cygni [19], confirmando o modelo heliocêntrico.

Tycho Brahe, um astrônomo célebre, rejeitando tanto o modelo geocêntrico quanto o heliocêntrico puro, propôs, em 1588, um modelo híbrido onde os planetas orbitavam o Sol, mas o Sol orbitava a Terra, evitando que o modelo entrasse em conflito com fenômenos já observados. Brahe também se destacou com suas observações extremamente precisas dos corpos celestes, dados esses que foram fundamentais para o trabalho de Kepler, pupilo de Tycho.

Após a morte de Tycho, o imperador Rodolfo II nomeou Kepler como seu sucessor na função de astrônomo imperial. Com acesso livre aos dados, Kepler pôde estudar com mais precisão as órbitas planetárias, colaborando com o desenvolvimento do modelo heliocêntrico, o que resultou em três leis conhecidas como as Leis de Kepler [3]:

- Lei das Órbitas: Os planetas orbitam o Sol em trajetórias elípticas, com o Sol ocupando um dos focos, conforme Figura [1.3]

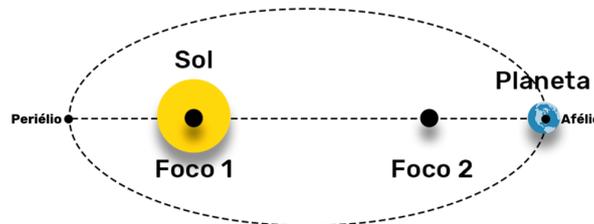


Figura 1.3: Ilustração da Primeira Lei de Kepler, mostrando a órbita elíptica de um planeta ao redor do Sol, com as posições de afélio (distância máxima) e periélio (distância mínima) destacadas. Fonte: [20]

- Lei das Áreas: A linha que conecta um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais, conforme Figura[1.4].

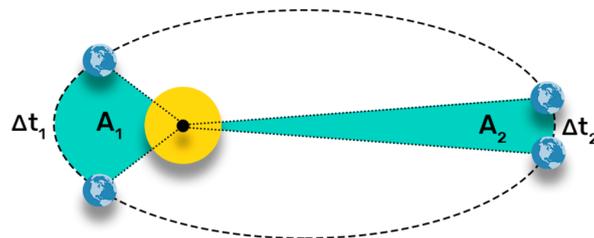


Figura 1.4: Representação da órbita demonstrando que em períodos iguais, $\Delta t_1 = \Delta t_2$, varre áreas iguais, $A_1 = A_2$. Fonte: [20]

- Lei dos Períodos: O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol, conforme mostra a Tabela 3.1.

Essas leis aprimoraram o modelo copernicano com a eliminação dos epiciclos devido à órbita elíptica e maior precisão para previsão das posições dos planetas ou distâncias

Planeta	Raio médio da órbita (R) em UA	Período (T) em anos terrestres	T^2/R^3
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,001
Terra	1,00	1,00	1,000
Marte	1,524	1,881	1,000
Júpiter	5,203	11,860	0,999
Saturno	9,539	29,460	1,000
Urano	19,190	84,010	0,999
Netuno	30,060	164,800	1,000

Tabela 1.1: Dados dos planetas do Sistema Solar mostrando a conservação relacionado à Terceira Lei de Kepler

relativas em relação ao Sol. Esse novo modelo, conhecido como Kepleriano, foi essencial para o desenvolvimento dos estudos acerca da gravidade propostos por Isaac Newton.

Os estudos de Kepler sobre as órbitas elípticas estabeleceram a base para que Newton formulasse a Lei da Gravitação Universal [21], e a partir desta também pode-se chegar nas Leis de Kepler, mostrando assim a conexão entre elas. Mas não foi apenas com a contribuição de Kepler que Isaac Newton pôde desenvolver a física em uma de suas obras principais, o livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [6], houve outros fatores ao longo de sua carreira que contribuíram com o desenvolvimento para a área conhecida hoje como mecânica clássica, como a Grande Peste, que o permitiu ficar numa reclusão produtiva, mas também a presença de outros cientistas contemporâneos, como o Edmond Halley [22].

Uma vez, questionado por Halley sobre qual seria órbita resultante de uma força que diminui com o inverso da distância ao quadrado [21], Newton respondeu sem hesitações, uma elipse, mas a demonstração do mesmo veio aparecer somente um tempo depois, o que também direcionou Newton para trabalhar com a Lei de Gravitação Universal. Além disso, Halley também investiu na produção do *Principia* com dinheiro do próprio bolso, visto que pôde identificar potencial nos trabalhos de Newton e o incentivou à publicação.

Com suas produções, não demorou para que Newton começasse a ser prestigiado por seus colegas cientistas contemporâneos. O impacto do livro consolidou-o como base da mecânica clássica [23], graças à fundamentação rigorosa com demonstrações matemáticas, experimentações e observações que unificaram os fenômenos terrestres e celestes sob as leis do movimento e da gravidade. Apesar disso, Newton reconheceu a importância de seus predecessores, e analogamente, ele também ajudou seus sucessores, como Simon Laplace, Albert Einstein, entre outros, que usaram de seu conhecimento para construir o que se sabe hoje em dia.

1.2 Leis de Kepler

Kepler questionou a autenticidade das órbitas circulares por causa da variação significativa no brilho ao longo do tempo, também observada em outros planetas, associada ao formato inadequado dessas órbitas. Kepler propôs que as órbitas teriam um formato elíptico em sua primeira lei, o que resolveria essas irregularidades. Hoje, essa lei é usada no planejamento de missões espaciais, como a colocação de satélites em órbitas elípticas. Por exemplo, satélites em órbitas geoestacionárias são colocados em trajetórias que maximiz-

zam sua eficiência de comunicação, enquanto missões interplanetárias utilizam trajetórias elípticas para economizar combustível durante manobras de transferência orbital.

Uma elipse é uma curva plana equivalente a um círculo achatado com simetria de reflexão de duas linhas perpendiculares no centro, ou seja, uma elipse centralizada em zero no plano cartesiano passaria pelos mesmos pontos nos eixos x e y (em módulo), e teria um comportamento espelhado em relação aos dois eixos, como demonstrado na Figura [1.5]

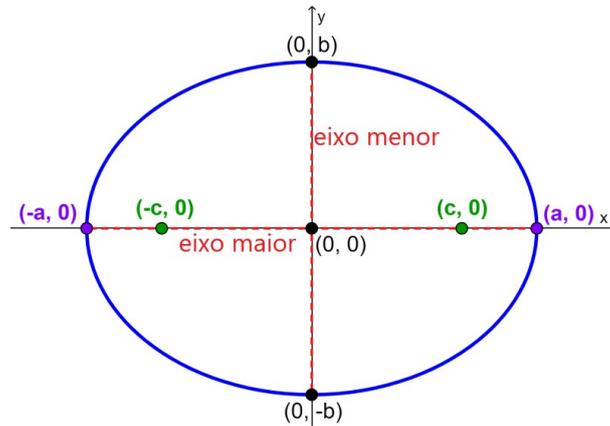


Figura 1.5: Representação de uma elipse centrada na origem do plano cartesiano. Os pontos verdes indicam os focos, os pontos roxos mostram as interseções com o eixo maior, e os pontos pretos com o eixo menor. Fonte: [24].

A equação da elipse centrada na origem é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.1)$$

em que x e y são os pontos no plano cartesiano que passam pela elipse, a é o semi-eixo maior, que descreve a distância do centro da elipse até um dos pontos mais distantes, b é o semi-eixo menor, que é a distancia do centro até um dos pontos mais próximos.

Os focos possuem uma das coordenadas no eixo maior e a outra é dada pela equação

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (1.2)$$

em que c representa a distância partindo do centro e pode ser calculado isolando o termo conforme a equação

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (1.3)$$

Finalmente, uma propriedade da elipse é que a soma das distancia dos focos a qualquer ponto da elipse é igual a $2a$, ou seja,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a. \quad (1.4)$$

Para a segunda lei, a Lei das Áreas, podemos aproximar a área traçada pelo segmento Sol-planeta num tempo infinitesimal por um triângulo, com a equação

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\theta, \quad (1.5)$$

em que r é o raio Sol-planeta e $d\theta$ é a variação do ângulo. Por meio das observações, Kepler percebeu que $\frac{d\theta}{dt}$ é constante, ou seja, em intervalos iguais, varre-se áreas iguais.

Após calcular os períodos orbitais e os semi-eixos maiores, Kepler testou diferentes hipóteses para encontrar uma relação matemática que ajustasse os dados observacionais. Inicialmente, percebeu-se que

$$P^3 \propto a^2, \quad (1.6)$$

em que P é o período orbital e a é o semi-eixo maior, assim

$$\frac{P^3}{a^2} = \text{constante}, \quad (1.7)$$

de modo que essas constantes de proporcionalidade é a mesma para todos os planetas, resultando assim na Terceira Lei de Kepler. Essa lei é utilizada para determinar o período orbital dos satélites artificiais da Terra. Por exemplo, satélites de navegação como o GPS têm seus períodos ajustados para que orbitem a Terra em tempos específicos, garantindo cobertura global e precisão na transmissão de dados.

1.3 As Leis de Newton

1.3.1 As três leis

Newton não foi o responsável pela criação das leis conhecidas como as Três Leis de Newton, pois as ideias sintetizadas nas leis já eram abordadas em debates filosóficos e observações num passado mais antigo. No entanto, Newton colocou ideias, supostamente distintas, para complementar uma as outras, de modo que as compilou como leis gerais, que não atuam somente em terra, mas também no universos celeste.

Antes de Newton, a ideia de Aristóteles, que um objeto precisa sempre de uma força atuando para que este permaneça em movimento, perdurou por cerca de 1500 anos, até que durante o Renascimento, Galileu o refutou a partir de seus experimentos com planos inclinados [25], em que percebeu-se que o corpo manteria movimento uma vez que não houvesse atrito, introduzindo a ideia de inércia, que é a resistência de um corpo quanto a alteração do estado do movimento.

Newton demonstrou que os corpos celestes também respondem há essa inércia, como no movimento orbital, que possui um movimento orbitante quase inercial, sofrendo ocasionais perturbações gravitacionais. Assim, a Primeira Lei de Newton pode ser definida que o corpo, seja em movimento, ou em inércia, tende a se manter no mesmo estado até que tenha uma força externa interagindo com o corpo.

Galileu também contribuiu com a segunda lei, pois estudava a aceleração dos corpos, portanto, concluiu que os corpos sofrem a mesma aceleração em virtude da gravidade, independente da massa. Além dele, outra contribuição direta se deve ao trabalho de René Descartes [26], na qual introduziu o conceito de quantidade de movimento definido como

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (1.8)$$

em que \vec{p} é o momento linear, m a massa e \vec{v} a velocidade do corpo.

Newton uniu as duas ideias, acrescentando a proporcionalidade direta da força em relação a aceleração, ou seja,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1.9)$$

em que \vec{F} é a força, \vec{a} a aceleração e a massa m seria a constante de proporcionalidade.

A formulação ainda foi ampliada para sistemas mais complexos, de modo que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.10)$$

ou seja, a força é a variação do momento linear. Logo, a Segunda Lei de Newton pode ser definida como a mudança de movimento proporcional à força impressa, ocorrendo na direção e sentido na qual ela é aplicada.

Para a terceira lei, a primeira contribuição partiu de Arquimedes [27], que descreveu o princípio do equilíbrio em alavancas, onde forças opostas geram torque igual. Além dele, Descartes e Huygens estudaram colisões e perceberam que as forças exercidas por dois corpos eram mutuamente compensadas [28].

Newton generalizou a noção de interação mútua para forças em sistemas dinâmicos, demonstrando que a força de gravidade exercida pela Terra sobre a Lua é acompanhada por uma força de igual magnitude que a Lua exerce sobre a Terra, causando as marés, por exemplo. Assim, a Terceira Lei de Newton mostra que toda a ação sempre tem uma reação de sentido oposto com mesma intensidade.

1.3.2 Lei da Gravitação Universal

Newton descreveu o seguinte experimento mental: um canhão na montanha dispara um projétil com determinada velocidade inicial e um certo ângulo em relação ao horizonte. Quando paralelo ao horizonte, o projétil lançado faz uma trajetória parabólica até atingir o chão montanha abaixo. Se colocarmos força o suficiente nesse canhão para que a velocidade inicial seja capaz de fazer esse projétil "cair" na mesma proporção da curvatura da terra, ele não alcançaria o chão pois o mesmo é curvado, e assim, possa até mesmo acertar o próprio canhão, representado na Figura 1.6.

Usando essa lógica é possível estender essa compreensão para explicar os movimentos celestes, logo, pode-se entender que a Lua está sempre "caindo" em direção à Terra, ou que os planetas estão sempre "caindo" em direção ao Sol. Vale ressaltar que a Lua (ou os planetas, em relação ao Sol) não está vindo diretamente à Terra pois ela possui uma velocidade tangencial, ou seja, uma velocidade perpendicular ao raio que liga os corpos, que a mantém em órbita em vez deixá-la em rota direta de colisão.

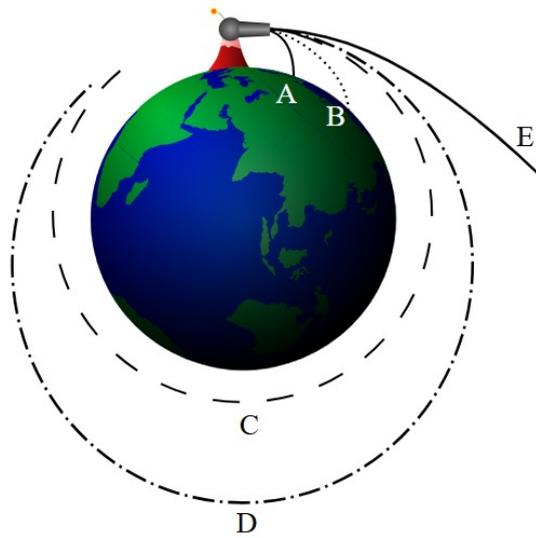


Figura 1.6: Representação do experimento mental de Newton: um canhão dispara projéteis com diferentes velocidades, demonstrando os conceitos de trajetória parabólica, órbita circular e velocidade de escape. Fonte: [29].

Antes de Newton, acreditava-se que as leis que governavam os movimentos celestes eram distintas das que regiam os eventos terrestres. Com a Lei da Gravitação Universal, Newton mostrou que a mesma força que faz uma maçã cair da árvore é a que mantém a Lua em órbita da Terra. Essa unificação permitiu descrever matematicamente os movimentos de planetas, luas e cometas e estabelecer a base para a mecânica celeste, o estudo dos movimentos de corpos sob a influência da gravidade.

Já se tinha bem definido a ideia da inércia aqui na Terra, onde um corpo em movimento permanece em movimento retilíneo uniforme, ou que um corpo permaneça em repouso até que haja uma força aplicada nesses corpos. Também tinha-se bem definido que a aceleração de queda de objetos próximos à terra é de $9,8\text{m/s}^2$. Em contra posição, o que se sabia do universo afora eram as leis de Kepler, na qual trazia consigo a força centrípeta, cujo a quantidade necessária para manter um corpo em órbita diminui com o quadrado do raio, ou seja,

$$F_{centripeta} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (1.11)$$

Dessa forma, pode-se pensar que a força centrípeta esta sempre atuando nos planetas, pois estes não estão em inércia, com um movimento retilíneo uniforme. Além disso, sabia-se que independente da massa do objeto em queda livre, a aceleração é a mesma, o que indica que essa força de atração é proporcional a massa da Terra, no entanto a Segunda Lei de Newton sugere que a força aplicada a um corpo também deve ser proporcional a este. Assim, tem-se que

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.12)$$

em que F é a força gravitacional entre dois corpos que depende de suas massas m_1 e m_2 e da distância r que os separa. Para transformar essa relação em uma igualdade foi adicionada uma constante de proporcionalidade G , assim

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.13)$$

em que G é conhecida como constante gravitacional, cujo seu valor mais tarde foi determinado como $G = 6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. A constante gravitacional G só foi medida por Henry Cavendish em 1798 [30], permitindo quantificar a força gravitacional em escala universal, tornando possível calcular massas de planetas, estrelas e buracos negros, além de densidades médias de corpos celestes e do universo.

Com esta equação Newton pôde verificar sua validade ao aplicá-la ao movimento da Lua, concluindo porque ela não colide com a Terra: a distância entre os dois corpos é suficiente para manter a força gravitacional em equilíbrio com o movimento orbital, conforme demonstra Figura 1.7.

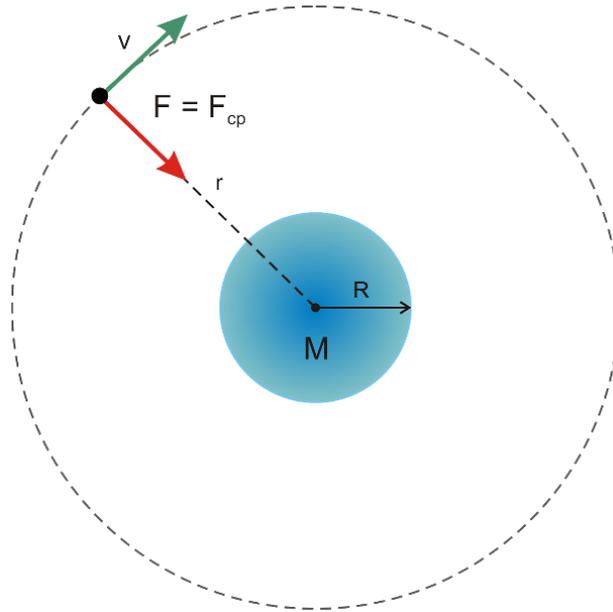


Figura 1.7: Representação de um sistema orbital: M é a massa do corpo central, r a distância entre os centros, v a velocidade orbital, e F_{cp} a força gravitacional que mantém o corpo em órbita. Fonte: [31]

A Lei da Gravitação Universal é a base para entender o comportamento de sistemas solares, de modo que as órbitas dos planetas ao redor do Sol seguem as leis de Kepler, explicando também a formação de um sistema solar, em que a gravidade é a força dominante que atrai partículas de gás e poeira, resultando na formação de estrelas, planetas e outros corpos. Além disso, essa lei explica as trajetórias elípticas de cometas, como o cometa Halley, que retorna ao Sistema Solar interno em intervalos previsíveis [32].

Essa lei não só forneceu a base para a compreensão de movimentos celestes, mas também transformou a capacidade humana de estudar e explorar o universo. Ela permanece central na astrofísica, mesmo quando complementada por teorias modernas, e é essencial para conectar fenômenos locais, como os movimentos planetários, a eventos interestelares e cosmológicos [8].

1.4 Relação Newton-Kepler

Após a demonstração da relação entre as leis de Newton e as de Kepler, pode-se expandir essa análise para compreender como essas interações governam os movimentos

observados no universo. A mecânica celeste fornece uma abordagem sistemática e detalhada para o estudo de corpos orbitais sob forças gravitacionais. Dessa forma, a partir da Lei de Gravitação Universal em conjunto com as três leis do movimento de Newton pode-se chegar as três leis de Kepler.

Partindo da Segunda Lei de Newton, pode-se igualá-la com a força gravitacional necessária para manter o corpo em órbita, e assim,

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{GMm}{r^2}\hat{r}. \quad (1.14)$$

Trocando a por $\frac{d^2r}{dt^2}$, tem-se

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}, \quad (1.15)$$

demonstrando assim que a aceleração devido a força gravitacional implica em uma órbita cônica, em que determinada excentricidade resulta numa órbita elíptica, confirmando assim a Primeira Lei de Kepler. Essa demonstração pode ser verificada na subseção 1.5.5.

Já para a Segunda Lei de Kepler, ou Lei das Áreas, é necessário encontrar uma relação da área varrida com o período. Aproximando a área varrida num tempo infinitesimal em uma triângulo, em que a altura do triângulo seria equivalente ao raio, e o comprimento da base seria equivalente à "reta" percorrida pelo corpo orbitante. Analisando pelo movimento orbital, o corpo percorre à uma distância r com uma variação que depende de θ . Como a área A do triângulo de altura a e base b é dada pela equação

$$A = \frac{ab}{2}, \quad (1.16)$$

então a área deste triângulo será

$$A = \frac{r(r\Delta\theta)}{2}, \quad (1.17)$$

em que $\Delta\theta$ é a variação do ângulo. Dessa forma, se não há variação de θ , não há área, e além disso, quanto maior for a variação de θ , maior será a área. Então, a variação de θ em relação ao tempo determinará a variação da área. Assim,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}. \quad (1.18)$$

No entanto, graças à conservação do momento angular, tópico explorado na subseção 1.5.1, pode-se definir $\frac{d\theta}{dt}$ como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}, \quad (1.19)$$

que quando substituída na Equação 1.18 tem-se

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m}, \quad (1.20)$$

em que m é a massa do corpo orbitante e L é o momento angular, sendo ambos constantes, conseqüentemente, demonstrando que a variação da área varrida em relação ao tempo é um valor constante, validando a Segunda Lei de Kepler.

E por fim, para relacionar a Terceira Lei de Kepler, utiliza-se do fato que a força gravitacional está em equilíbrio com a força centrípeta, desse modo, partindo da equação da força centrípeta em módulo definida por:

$$F_{centrípeta} = \frac{m_{Lua}v^2}{r}, \quad (1.21)$$

em que $F_{centrípeta}$ é a força centrípeta, m_{Lua} é a massa da Lua, v é a velocidade tangencial e r é a distância entre os copos, no caso, entre a Lua e o centro em que ela orbita. A velocidade, em termos do período, pode ser definida como

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (1.22)$$

em que T é o período de uma translação completa. Substituindo a Equação (1.22) na Equação (1.21) tem-se que

$$F_{centrípeta} = \frac{m_{Lua}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4m_{Lua}\pi^2 r}{T^2}. \quad (1.23)$$

Como a força centrípeta está em equilíbrio com a força gravitacional, pode-se igualar a Equação (1.23) com a Equação (1.13), de modo que

$$G \frac{m_{Terra}m_{Lua}}{r^2} = \frac{4m_{Lua}\pi^2 r}{T^2}. \quad (1.24)$$

Portanto, ao isolar T^2 obtém-se

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_{Terra}}, \quad (1.25)$$

que demonstra a constante de proporcionalidade na Terceira Lei de Kepler como

$$C = \frac{4\pi^2}{Gm_{Terra}} \quad (1.26)$$

em que C é uma constante, de modo que fica explícito a relação entre a lei de Kepler e a Lei da Gravitação Universal.

1.5 Mecânica Celeste

1.5.1 Momento linear e angular

O peso dos objetos é determinado por uma força diretamente proporcional à massa deste e à aceleração gravitacional, definida como

$$\vec{p} = m\vec{g}, \quad (1.27)$$

em que \vec{p} é a força peso, m é a massa e \vec{g} é a aceleração gravitacional [1], que quando na Terra, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. De forma similar, o momento descreve o estado de movimento do corpo a partir da massa e da velocidade, de modo que se percebe que a força pode ser obtida a partir da derivada do momento, conforme descrito na Equação 1.28,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{p}, \quad (1.28)$$

em que \vec{F} é a força necessária para alterar a inércia de um corpo, m é a massa do corpo, \vec{a} é a aceleração, \vec{v} é a velocidade e \vec{p} é o momento linear. Com isso, percebe-se que só há força se houver variação no momento linear.

A conservação do momento linear total se demonstra em sistemas isolados, por exemplo, para que um foguete possa se mover no espaço sideral, ele diminui sua massa ejetando gases e aumenta a velocidade no sentido oposto à ejeção, mas é importante ressaltar que a combustão também tem sua contribuição no movimento. Aqui na Terra, quando o foguete experimenta a aceleração gravitacional e a resistência do ar, ambos com contribuição opostas ao sentido do movimento, pode-se concluir que aqui não é um sistema isolado. Essa análise dos movimentos dos foguetes também demonstram a Terceira Lei de Newton, a Lei da Ação e Reação.

Além dessa grandeza vetorial, tem-se também o momento angular, definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1.29)$$

em que \vec{r} é o vetor que liga o eixo de rotação com o corpo que translada ao redor e \vec{p} é o momento linear. A relação de vetores é descrito pela figura [1.8].

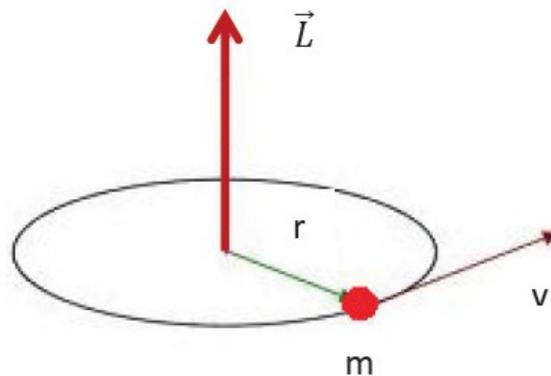


Figura 1.8: Ilustração do momento angular em um sistema orbital, com vetores posição (\vec{r}), velocidade (\vec{v}), e momento angular (\vec{L}), demonstrando sua perpendicularidade ao plano da órbita. Fonte: [33]

A magnitude pode ser definida como

$$L = rp \sin \theta \quad (1.30)$$

em que θ é o ângulo de abertura de r à p . Logo, percebe-se que para uma órbita circular em que r é constante e numa situação que não há variação do momento, o que vai definir o valor de L é somente θ , sendo máximo para quando p e r forem perpendiculares, e nulo quando forem paralelos.

Por exemplo, uma pedra amarrada a um barbante que é girada com certa aceleração possui um vetor posição cujo raio aponta sempre para o centro da trajetória circular. O momento linear da pedra, por sua vez, está constantemente alinhado na direção tangencial, indicada por $\hat{\theta}$. Assim, quando a pedra escapa da mão que a segura, ela segue uma trajetória retilínea e tangente à trajetória circular no ponto em que foi solta, devido à inércia e à ausência de forças externas agindo na direção perpendicular.

Trocando a corda por uma força atrativa entre os corpos, o comportamento é análogo, e além disso, nessa situação em que r e F apontam para o mesmo ponto, ou seja, possuem a mesma direção o toque é nulo, pois

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}, \quad (1.31)$$

em que $\vec{\tau}$ é o torque do sistema, grandeza vetorial que mede a capacidade de um corpo ser girado ao redor de um eixo, F é a força e r o raio. Além disso, devido ao torque ser igual à variação do momento angular em relação ao tempo, ou seja,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (1.32)$$

o momento angular é conservado, e como consequência, o vetor \vec{L} mantém-se constante, apontando à mesma direção, portanto, definindo a órbita num plano perpendicular ao vetor, dessa forma, o problema pode ser aproximado com apenas duas dimensões.

Finalmente, seguindo a partir da Equação 1.30, pode-se substituir p definido na Equação 1.27, e assim,

$$L = r(mv) \sen \theta, \quad (1.33)$$

em que v seria a velocidade perpendicular à r , logo, $\sen \theta = 1$ e $v_{perpendicular}$ pode ser definido como o raio multiplicado pela velocidade de variação do ângulo, ou seja,

$$v_{perpendicular} = r \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.34)$$

em que θ é o ângulo de abertura dado pelo raio r em dois momentos distintos, e assim,

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.35)$$

equação essa essencial para construir a equação da órbita, assim como, relacionar a Terceira Lei de Kepler com a Lei da Gravitação Universal, como feito na Seção 1.4.

1.5.2 Trabalho e energia

O trabalho é a energia transferida à um corpo ou sistema com a aplicação de uma força e sua definição pode ser dada como

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}, \quad (1.36)$$

em que \vec{F} é a força e \vec{d} representa o deslocamento ao longo da trajetória e W é o trabalho [1]. Usando esse conceito para entender qual o trabalho realizado pela Terra para atrair um corpo de massa m de uma altura h , tem-se que

$$W = \vec{F} \cdot \vec{h} = Fh \cos \theta, \quad (1.37)$$

e como a força está na mesma direção e sentido que o movimento, $\cos \theta = 1$. Usando a Segunda Lei de Newton,

$$W = mah, \quad (1.38)$$

em que a é a aceleração, mas como a única aceleração ao corpo é a gravitacional, pode-se substituir a por g , em que $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Logo,

$$U = mgh \quad (1.39)$$

em que U é a energia potencial gravitacional e corresponde à energia necessária para manter um corpo de massa m a uma altura h , desde que esta seja relativamente baixa em comparação ao raio da Terra.

Para corpos mais distantes pode-se utilizar da Equação 1.21, em virtude do trabalho também ser definido como

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F dr, \quad (1.40)$$

pode-se substituir F e então,

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{-GMm}{r^2} \right] dr \quad (1.41)$$

em que r_1 e r_2 são os raios inicial e final, respectivamente. Integrando e substituindo os valores tem-se

$$W = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.42)$$

Por convenção, o trabalho é nula em uma distância infinita, logo, utiliza-se o sinal negativo para que se aproxime de zero no infinito, então substituindo r_1 por r , tem-se

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (1.43)$$

em que U é a energia potencial gravitacional para corpos mais distantes.

Analogamente, a energia cinética é a quantidade de trabalho necessário para colocar um corpo em movimento. Usando a Equação 1.36, sabe-se pela Segunda Lei de Newton que força é a variação de momento. Logo,

$$W = \frac{dp}{dt} \Delta_x \quad (1.44)$$

Para explicitar a equação acima em termos da velocidade e da massa utiliza-se da equação de movimento retilíneo uniformemente variado, como

$$v_f = v_i + at \quad (1.45)$$

em que v_f é a velocidade final, v_i é a velocidade inicial, a é a aceleração e t é a variação de tempo. Considerando o trabalho para tirar um objeto em repouso, $v_i = 0$, portanto, $v_f = v$.

Além disso, partindo da equação de deslocamento,

$$\Delta_x = v_i t + \frac{1}{2} at^2, \quad (1.46)$$

em que Δ_x é o deslocamento. Quando isola-se t da Equação 1.45 e o substitui na Equação 1.46, tem-se que

$$\Delta_x = \frac{a v^2}{2 \cdot 2^2} = \frac{v^2}{2a}, \quad (1.47)$$

que substituindo na Equação 1.44 fica

$$W = \frac{dp}{dt} \frac{v^2}{2a} = m \frac{dv}{dt} \frac{v^2}{2a} = ma \frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2}, \quad (1.48)$$

resultando na equação conhecida como energia cinética K ,

$$K = \frac{1}{2} mv^2. \quad (1.49)$$

Ambas energias podem entrar em equilíbrio num sistema isolado, de modo que a energia mecânica E , definida como

$$E = K + U, \quad (1.50)$$

seja conservada. Um exemplo didático seria o pêndulo (desconsiderando a aceleração gravitacional e atrito do ar), pois quando em repouso, energia mecânica é nula se considerar a altura que está como referencial. Uma vez colocado ao topo para oscilar, é dada altura, e conseqüentemente, energia potencial gravitacional. Quando em queda, converte energia potencial gravitacional em energia cinética, ganhando velocidade máxima até chegar no ponto médio, e por fim, convertendo energia cinética em energia potencial até que a velocidade seja nula e a altura seja máxima.

De forma similar, os planetas em órbitas elípticas também demonstram essa conservação de energia mecânica, pois quando mais próximos ao Sol, possui energia potencial gravitacional mais baixa, ganhando velocidade, e igualmente, quando mais longe, maior será a energia potencial gravitacional, e menor será a energia cinética.

1.5.3 Força Central

Com base nos aparatos anteriores, um sistema orbital também pode ser representado com uma força central, em que

$$\vec{F} \equiv F(r)\hat{r} \quad (1.51)$$

ou seja, a força com que um corpo é atraído pelo outro ocorre somente na direção que os ligam, independente da direção ou orientação. Além da direção e dependência radial, um sistema só pode respeitar uma força central caso o momento angular for conservado, além da conservação da energia mecânica. Para fazer essa verificação é necessário definir K em termos da velocidade radial e tangencial.

Partindo da equação 1.49, que em coordenadas polares pode-se separar v em dois componentes: a velocidade radial, que é a velocidade em que há a variação do tamanho de r , representada por

$$\frac{d}{dt}r = \dot{r}, \quad (1.52)$$

e a velocidade tangencial, ou seja, a velocidade em que o corpo segue ao redor da massa central na direção perpendicular de r , que já demonstrado ser

$$v_{perp} = r\dot{\theta}, \quad (1.53)$$

em que v_{perp} é a velocidade perpendicular, logo,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \quad (1.54)$$

e portanto,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (1.55)$$

Porém, para melhor verificar a conservação de E é importante trabalhar com o potencial efetivo para simplificar o movimento radial.

1.5.4 Potencial efetivo

O potencial efetivo surge quando se reformula a força central para incluir o efeito do momento angular. Dessa forma, pode-se analisar o sistema a partir dos efeitos da energia total do mesmo. Partindo da equação 1.55, devido a conservação de momento angular pode-se reescrever

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}, \quad (1.56)$$

que substituindo na energia cinética angular, tem-se que

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.57)$$

Portanto, a energia total do sistema será dada por

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (1.58)$$

e assim, pode-se definir um potencial efetivo U_{eff} que dependa de r , combinando assim o termo angular e gravitacional na equação

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (1.59)$$

1.5.5 Equação da órbita

Partindo da Segunda Lei de Newton, pode-se obter que

$$\vec{F} = -\nabla U, \quad (1.60)$$

em que U representa uma energia potencial, nesse caso, substituindo pelo potencial efetivo tem-se

$$F = -\frac{d}{dr}\left[\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}\right], \quad (1.61)$$

que também pode ser representado como

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}\right], \quad (1.62)$$

em que \ddot{r} é a aceleração de r e m a massa. Esta equação de $r(t)$ é não-homogênea e não-linear. Em favor da simplificação, pode-se fazer duas considerações: fazer r dependente de θ e considerar $r = 1/u$, em que u também é uma variável em função de θ . Com esses ajustes, pode-se simplificar a equação anterior para encontrar $r(\theta)$ responsável por descrever o movimento do corpo orbitante.

Para tal, é necessário encontrar \ddot{r} . Partindo da regra da cadeia,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.63)$$

logo,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}. \quad (1.64)$$

Usando $\dot{\theta}$ da conservação do momento angular, tem-se que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}. \quad (1.65)$$

Substituindo r por $1/u$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u}\right) \frac{Lu^2}{m}. \quad (1.66)$$

Substituindo dr/dt por \dot{r} e derivando fica

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{Lu^2}{m}. \quad (1.67)$$

Simplificando,

$$\dot{r} = -\frac{du}{d\theta} \frac{L}{m}. \quad (1.68)$$

Portanto,

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.69)$$

e assim, usando novamente da conservação do momento, tem-se

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{du}{d\theta} \frac{L}{m} \right) \left(\frac{L}{m} u^2 \right), \quad (1.70)$$

logo,

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (1.71)$$

Com esse resultado, pode-se retornar à Equação 1.62 e então substituir \ddot{r} definido na Equação 1.71, e assim,

$$-m \frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \right). \quad (1.72)$$

Derivando o termo a direita da igualdade,

$$-m \frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2L^2}{2mr^3} + \frac{GMm}{r^2}. \quad (1.73)$$

Substituindo r por $1/u$,

$$-m \frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2L^2 u^3}{2m} + GMm u^2, \quad (1.74)$$

que simplificando fica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (1.75)$$

A equação acima é diferencial não-homogênea cuja solução é a soma da solução geral com a solução particular.

Para encontrar a solução geral é necessário considerar que

$$\frac{GMm^2}{L^2} = 0, \quad (1.76)$$

logo, a solução geral é dada por

$$u_g = A \cos \theta + B \sen \theta, \quad (1.77)$$

em que u_g é a solução geral de u , e A e B são parâmetros a definir. Já para a solução particular será o próprio termo não-homogêneo da equação, ou seja,

$$u_p = \frac{GMm^2}{L^2}, \quad (1.78)$$

em que u_p é a solução particular. Dessa forma, a solução $u(\theta)$ é dada por

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (1.79)$$

Trigonometricamente, pode-se combinar

$$A \cos \theta + B \sin \theta = C \cos(\theta - \theta_0), \quad (1.80)$$

em que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ representa a amplitude e θ_0 é o deslocamento de fase. Substituindo-os na função e retornando em termos de $r(\theta)$, tem-se que

$$r(\theta) = \frac{1}{u} = \frac{1}{C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2}}, \quad (1.81)$$

que além de ser a equação da órbita, também descreve uma forma cônica, pois segue um padrão similar da equação, sendo esta

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (1.82)$$

de modo que, caso reajuste a Equação 1.81, obtém-se a excentricidade, que mede o grau de afastamento de um círculo perfeito, definida por

$$e = \frac{C}{\frac{GM}{L^2}}, \quad (1.83)$$

e p , conhecido como semi-latus rectum, que está relacionado com a distância dos focos e é definido por

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}. \quad (1.84)$$

1.6 Problema de Três Corpos

O problema de três corpos ocorre quando três corpos interagem gravitacionalmente ao mesmo tempo entre si [34]. Ao contrário do problema de dois corpos, onde as interações podem ser descritas analiticamente utilizando as leis de Newton e Kepler, o problema de três corpos é fundamentalmente mais complexo por causa da natureza acoplada e não-linear das equações diferenciais envolvidas.

Historicamente, o problema surgiu no contexto da mecânica celeste, particularmente no estudo das interações entre o Sol, a Terra e a Lua. Henri Poincaré demonstrou que o problema é caótico, significando que pequenas mudanças nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nas trajetórias futuras. Isso torna impossível obter uma solução geral analítica.

Dessa forma, dentre os pontos de destaque em relação à complexidade do problema, a não-linearidade ocorre devido as forças gravitacionais serem interdependentes, de modo que não é possível simplificar o problema assumindo interações isoladas. Além disso, a caoticidade deixa explícito que o comportamento do sistema é altamente sensível às condições iniciais, dificultando previsões de longo prazo, e por fim, a falta de solução analítica deixa o problema restrito aos métodos numéricos, aproximativos, ou aos casos especiais, como os pontos de Lagrange, que consegue oferecer soluções exatas [35].

Apesar dos desafios, o problema tem grande importância prática. Ele é usado para estudar dinâmicas complexas em sistemas astronômicos, como órbitas de asteroides, sistemas planetários e planejamento de trajetórias de sondas espaciais.

Para trabalhar com as equações, é interessante representar a Equação 1.13 demonstrando atuação de um corpo sobre o outro, assim,

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}, \quad (1.85)$$

em que F_{12} representa a força atrativa que o corpo um sofre resultante da presença do corpo dois, G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos um e dois, respectivamente, $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ representa a distância entre os corpos, e \hat{r}_{12} é o vetor unitário que aponta de m_1 para m_2 , e pode ser representado como

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (1.86)$$

Pela Segunda Lei de Newton, se

$$\vec{F}_{12} = m_1 a_1, \quad (1.87)$$

em que a_1 é aceleração de m_1 , então,

$$a_1 = G \frac{m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}. \quad (1.88)$$

Agora, quando adicionado mais um corpo, é necessário representar a força que o corpo um sofre sobre a presença do corpo dois e três, assim,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}, \quad (1.89)$$

em que F_1 é a força resultante aplicada em m_1 , F_{12} é a força devido a presença de m_2 , e F_{13} devido m_3 . Assim, a aceleração de m_1 sera dada pela equação

$$a_1 = G \frac{m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + G \frac{m_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}, \quad (1.90)$$

analogamente, a aceleração de m_2 será

$$a_2 = G \frac{m_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + G \frac{m_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}, \quad (1.91)$$

e também para m_3 será

$$a_3 = G \frac{m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + G \frac{m_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}. \quad (1.92)$$

As equações acima podem ser representadas por uma somatória para um corpo $i = 1, 2, 3$:

$$\vec{a}_i = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}, \quad (1.93)$$

em que a_i é a aceleração do corpo i , \vec{r}_i e \vec{r}_j são as posições dos corpos i e j , e m_j é a massa do corpo j .

Os elementos da Equação (1.93) podem ser decompostos em x , y e z , de modo que

$$r_i = (x_i, y_i) \quad (1.94)$$

representam a posição do corpo i , e

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (1.95)$$

representa a distância do corpo i até o corpo j , e assim, as velocidades em cada eixo será dado por

$$a_{x,i} = G \frac{m_j(x_j - x_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.96)$$

para componente x , e

$$a_{y,i} = G \frac{m_j(y_j - y_i)}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.97)$$

para componente y .

Para tal, o método numérico de Runge-Kutta lida com equações diferenciais, permitindo aproximações precisas a curto prazo com o auxílio da computação numérica, utilizando a linguagem C no editor Vi, dentro do Ubuntu no WSL, para modelar sistemas complexos e analisar o comportamento dinâmico dos corpos.

Capítulo 2

Método Numérico e aplicação

2.1 Introdução

O método de Runge-Kutta (RK) foi desenvolvido por Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta no final do século XIX [36]. Ambos eram matemáticos alemães que buscavam melhorar a precisão e a eficiência de métodos numéricos para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs). O trabalho de Runge foi publicado em 1895, e Kutta refinou e ampliou suas ideias em 1901. O método tornou-se uma ferramenta fundamental no cálculo numérico por sua simplicidade e versatilidade.

Técnica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias de forma numérica. Baseia-se em aproximações iterativas, partindo de um ponto inicial e utilizando derivadas auxiliares para determinar o próximo ponto. Este método é especialmente útil em sistemas dinâmicos complexos, como o problema de três corpos, em virtude da sua capacidade de equilibrar precisão e eficiência computacional.

Partindo do método de Euler, em que a partir do ponto inicial e a derivada do ponto inicial tem-se o próximo ponto, ou seja,

$$x_{n+1} = x_n + dt f(t_n, x_n) \quad (2.1)$$

em que $f(t_n, x_n)$ é a derivada no ponto (t_n, x_n) , dt é o tamanho do passo, ou seja, $dt = t_{n+1} - t_n$, x_i é o ponto inicial e x_{i+1} é o próximo ponto. Porém, o método de Euler possui erros acumulados, que podem ser diminuídos de duas formas, diminuindo o tamanho do passo dt ou adicionando mais derivadas auxiliares para melhorar a precisão do próximo passo de acordo com a função.

Para isso então, utiliza-se do método RK que possui a equação generalizada descrita por

$$x_{n+1} = x_i + \phi dt, \quad (2.2)$$

em que x_{n+1} é o valor de x no ponto $t_{n+1} = t_n + dt$ em que dt é o tamanho do passo e ϕ é uma função que descreve a inclinação média descrita por

$$\phi = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_i k_i \quad (2.3)$$

para o método de ordem i , em que c_i são coeficiente a determinar, e k_i é dado por

$$k_i = f(t + p_i dt, y + q_{i1} k_1 dt + q_{i2} k_2 dt + \dots + q_{i,i-1} k_{i-1} dt), \quad (2.4)$$

descrevendo assim as i inclinações em termos de k_i , portanto, p_i e q_i também são coeficientes específicos a determinar para cada ordem. Para entrar em equilíbrio entre precisão

e maior estabilidade balanceado com o processamento computacional, a ordem mais adequada é a quarta.

Para identificar os parâmetros é necessário igualar a expansão em Série de Taylor da solução exata da equação diferencial com a equação (2.2), de modo que os parâmetros clássico do método de quarta ordem seriam $p_1 = 0$, $p_2 = P_3 = 1/2$, $p_4 = 1$, $q_{21} = q_{32} = 1/2$, $q_{31} = q_{41} = q_{42} = 0$, $q_{43} = 1$, $a_1 = a_4 1/6$ e $a_2 = a_3 = 1/3$ [37].

E assim, o conjunto de equações fica

$$x_{n+1} = x_n + dt \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.5)$$

em que k_1 é dado por

$$k_1 = f(t_i, x_i), \quad (2.6)$$

k_2 fica

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, x_i + \frac{dt}{2}k_1\right), \quad (2.7)$$

já k_3 ,

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{dt}{2}, x_i + \frac{dt}{2}k_2\right), \quad (2.8)$$

e a última inclinação, k_4 , será

$$k_4 = f(t_i + dt, x_i + dtk_3). \quad (2.9)$$

A Figura 2.1 demonstra a relação das retas k_1 , k_2 , k_3 e k_4 com uma função ϕ num passo h .

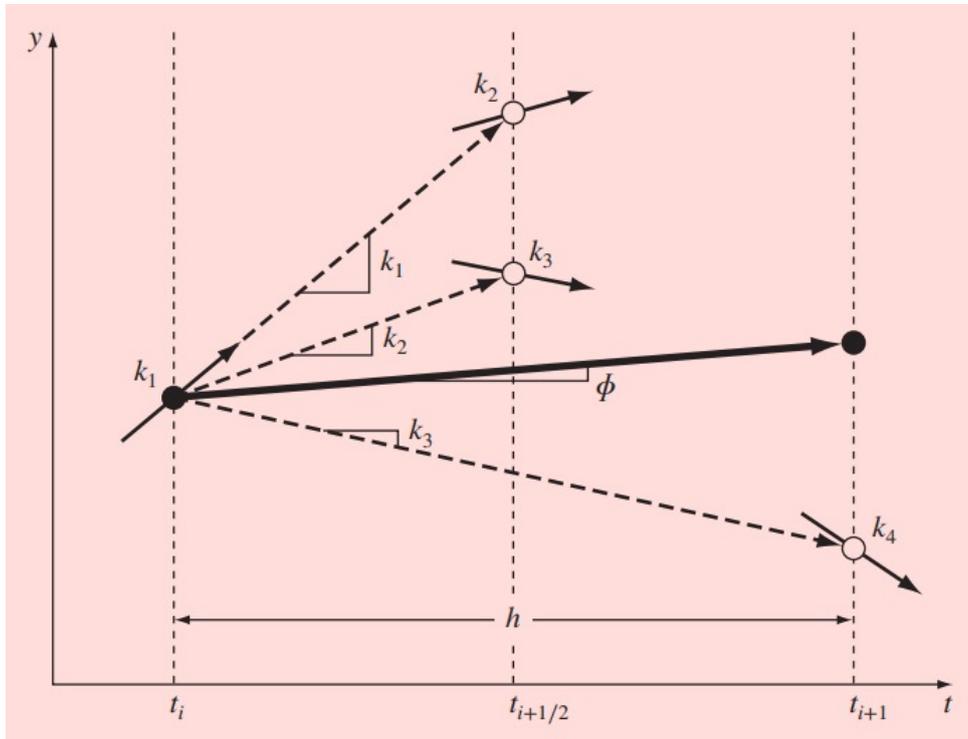


Figura 2.1: Imagem representando quais são os pontos e inclinações calculados para as retas auxiliares que resultam no ponto do próximo passo. Fonte [37].

Mas para poder utilizá-las é necessário fazer a discretização da equação, ou seja, utilizar da definição de derivada para transformar o limite contínuo em discreto. A derivada de uma função pode ser definida como

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta_t} = v \quad (2.10)$$

em que $\Delta_t = t_{n+1} - t_n$, t_{n+1} é o ponto final, t_n é o ponto inicial. Primeiramente, retira-se o limite de Δ_x tendendo a zero, representado por dt , assim,

$$v = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{dt}, \quad (2.11)$$

e isolando $x(t_{i+1})$ tem-se

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + v \cdot dt, \quad (2.12)$$

que demonstra que a partir da posição inicial e a velocidade no ponto $x(t_n)$, pode-se obter a posição final, sendo exatamente a condição inicial necessária para o método.

Quando necessário calcular uma equação ordinária de segunda ordem, como o método apenas trabalha com equações diferenciais de primeira ordem, é necessário separá-la em duas partes, com a primeira contemplada na Equação (2.11) e (2.12), e a segunda parte como

$$v(x_{n+1}) = v(x_n) + a \cdot dx, \quad (2.13)$$

em que $x_{n+1} \equiv x(t_{n+1})$, $x_n \equiv x(t_n)$, dx é o tamanho do passo e $a = \frac{dv}{dt}$, sendo assim duas equações acopladas com duas condições iniciais.

Na seção seguintes, é aplicado o método de Runge-Kutta para abordar diferentes problemas da mecânica celeste, desde a validação da Terceira Lei de Kepler até a análise de sistemas mais complexos, como o problema dos três corpos. Isso permite não apenas confirmar as leis fundamentais discutidas, mas também explorar situações onde soluções analíticas são inviáveis.

2.2 Aplicação

2.2.1 Equação da órbita

Para calcular a equação da órbita pode-se partir da Equação (1.75), que rescrevendo-a em duas partes fica

$$\frac{du}{d\theta} = v_u, \quad (2.14)$$

em que v_u é a velocidade em termos de u , e

$$\frac{dv_u}{d\theta} = -u + \frac{GM}{L^2}. \quad (2.15)$$

Discretizando a Equação (2.14),

$$u(\theta_{n+1}) = u(\theta_n) + v_u \Delta\theta, \quad (2.16)$$

e a equação (2.15),

$$v_u(u_{n+1}) = v_u(u_n) + \left(-u + \frac{GM}{L^2}\right) \Delta\theta. \quad (2.17)$$

2.2.2 Problema dos três corpos

Para o problema dos três corpos, pode-se partir do conjunto de equações para cada componente x e y , são elas Equação (1.96) e Equação (1.97), de modo que as são dadas em

$$\frac{dv_{x,i}}{dt} = a_{x,i} \quad (2.18)$$

para x , e

$$\frac{dv_{y,i}}{dt} = a_{y,i} \quad (2.19)$$

para y , em que as velocidades são discretizadas em

$$v_{x,i}^{n+1} = v_{x,i}^n + dt a_{x,i}^n \quad (2.20)$$

na direção x , e

$$v_{y,i}^{n+1} = v_{y,i}^n + dt a_{y,i}^n \quad (2.21)$$

na direção y . E as velocidades também são definidas em

$$\frac{dx_i}{dt} = v_{x,i} \quad (2.22)$$

para o componente x , e

$$\frac{dy_i}{dt} = v_{y,i} \quad (2.23)$$

para o componente y . De modo que as posições são discretizadas em

$$x_i^{n+1} = x_i^n + dt v_{x,i}^n \quad (2.24)$$

em x , e

$$y_i^{n+1} = y_i^n + dt v_{y,i}^n \quad (2.25)$$

em y .

Capítulo 3

Resultados

Para calcular a equação da órbita, foram utilizados as condições iniciais apresentadas na tabela a seguir. Todos os planetas utilizaram θ inicial e velocidade radial inicial nulas, com passo de 0.01 radianos.

Planeta	Raio Médio da Órbita (R) [m]	Velocidade Orbital Média (V) [m/s]
Mercúrio	5.79×10^{10}	4.79×10^4
Vênus	1.082×10^{11}	3.5×10^4
Terra	1.496×10^{11}	2.978×10^4
Marte	2.279×10^{11}	2.41×10^4
Júpiter	7.785×10^{11}	1.3×10^4
Saturno	1.433×10^{12}	9.69×10^3
Urano	2.871×10^{12}	6.8×10^3
Netuno	4.498×10^{12}	5.43×10^3

Tabela 3.1: Dados orbitais dos planetas do Sistema Solar. Fonte: [38].

As outras condições iniciais foram necessárias para calcular as órbitas do sistema Sol-Terra-Lua e estão apresentadas na tabela a seguir. Além delas, foi usado dt de 60 segundos para o cálculo de RK num intervalo de 0 a 20000 passos calculados, de modo que o intervalo total foi 1 200 000 segundo, que equivalem a quase 14 dias.

Corpo	Posição Inicial (m)	Velocidade Inicial (m/s)	Massa (kg)
Sol	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	1.9885×10^{30}
Terra	$(1.496 \times 10^{11}, 0, 0)$	$(0, 2.978 \times 10^4, 0)$	5.972×10^{24}
Lua	$(1.499844 \times 10^{11}, 0, 0)$	$(0, 3.0802 \times 10^4, 0)$	7.342×10^{22}

Tabela 3.2: Condições iniciais de posição (x,y,z) , velocidade (x,y,z) e massa dos corpos celestes. Observa-se que a velocidade inicial da Lua é maior do que a da Terra mas isso se deve ao referêcia ser a posição inicial do Sol, de modo que a velocidade total da Lua é a soma da velocidade orbital da Terra em relação ao Sol com a velocidade orbital da Lua de 1.022×10^3 em relação à Terra. Fonte: [38].

3.1 Cálculo das Equações das Órbitas Sol-Planeta

Usando os dados da Tabela 3.1, massa do Sol como 1.9885×10^{30} e a constante $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ como condição inicial, foram construídas tabelas para cada planeta com os dados θ , u , v_u e r . Para o planeta Mercúrio, tem-se a 3.3:

Tabela 3.3: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	1.727116×10^{-11}	$-1.228716 \times 10^{-16}$	5.790000×10^{10}
0.5	1.727114×10^{-11}	$-6.141124 \times 10^{-16}$	5.790005×10^{10}
1.0	1.727110×10^{-11}	$-1.226690 \times 10^{-15}$	5.790021×10^{10}
1.5	1.727102×10^{-11}	$-1.836201 \times 10^{-15}$	5.790046×10^{10}
2.0	1.727091×10^{-11}	$-2.441123 \times 10^{-15}$	5.790082×10^{10}
2.5	1.727078×10^{-11}	$-3.039943 \times 10^{-15}$	5.790128×10^{10}
3.0	1.727061×10^{-11}	$-3.631165 \times 10^{-15}$	5.790184×10^{10}
3.5	1.727041×10^{-11}	$-4.213311 \times 10^{-15}$	5.790250×10^{10}
4.0	1.727019×10^{-11}	$-4.784926 \times 10^{-15}$	5.790325×10^{10}
4.5	1.726993×10^{-11}	$-5.344581 \times 10^{-15}$	5.790410×10^{10}
5.0	1.726965×10^{-11}	$-5.890877 \times 10^{-15}$	5.790504×10^{10}
5.5	1.726935×10^{-11}	$-6.422449 \times 10^{-15}$	5.790608×10^{10}
6.0	1.726901×10^{-11}	$-6.937969 \times 10^{-15}$	5.790720×10^{10}

Para o planeta Vênus, Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	9.242144×10^{-12}	0.000000×10^0	1.082000×10^{11}
0.5	9.243910×10^{-12}	6.914134×10^{-15}	1.081793×10^{11}
1.0	9.248774×10^{-12}	1.213545×10^{-14}	1.081224×10^{11}
1.5	9.252708×10^{-12}	1.389615×10^{-14}	1.080765×10^{11}
2.0	9.262567×10^{-12}	1.311362×10^{-14}	1.079614×10^{11}
2.5	9.268120×10^{-12}	8.630989×10^{-15}	1.078968×10^{11}
3.0	9.270843×10^{-12}	2.035191×10^{-15}	1.078651×10^{11}
3.5	9.270676×10^{-12}	$-2.983879 \times 10^{-15}$	1.078663×10^{11}
4.0	9.265993×10^{-12}	$-1.091438 \times 10^{-14}$	1.079215×10^{11}
4.5	9.259606×10^{-12}	$-1.409765 \times 10^{-14}$	1.079960×10^{11}
5.0	9.252475×10^{-12}	$-1.382932 \times 10^{-14}$	1.080792×10^{11}
5.5	9.244073×10^{-12}	$-7.205688 \times 10^{-15}$	1.081774×10^{11}
6.0	9.242719×10^{-12}	$-4.029648 \times 10^{-15}$	1.081933×10^{11}

Para o planeta Terra, segue a Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	6.684492×10^{-12}	0.0	1.496000×10^{11}
0.5	6.684616×10^{-12}	9.885578×10^{-16}	1.495972×10^{11}
1.0	6.686329×10^{-12}	3.362286×10^{-15}	1.495589×10^{11}
1.5	6.688205×10^{-12}	3.985714×10^{-15}	1.495169×10^{11}
2.0	6.690151×10^{-12}	3.633301×10^{-15}	1.494735×10^{11}
2.5	6.691689×10^{-12}	2.391329×10^{-15}	1.494391×10^{11}
3.0	6.692443×10^{-12}	5.638766×10^{-16}	1.494223×10^{11}
3.5	6.692230×10^{-12}	$-1.401633 \times 10^{-15}$	1.494270×10^{11}
4.0	6.691099×10^{-12}	$-3.023974 \times 10^{-15}$	1.494523×10^{11}
4.5	6.689330×10^{-12}	$-3.905940 \times 10^{-15}$	1.494918×10^{11}
5.0	6.687354×10^{-12}	$-3.831596 \times 10^{-15}$	1.495360×10^{11}
5.5	6.685492×10^{-12}	$-2.644274 \times 10^{-15}$	1.495776×10^{11}
6.0	6.684651×10^{-12}	$-1.116467 \times 10^{-15}$	1.495964×10^{11}

Seguindo com o planeta Marte, [3.6](#).

Tabela 3.6: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	4.387890×10^{-12}	1.276991×10^{-16}	2.279000×10^{11}
0.5	4.388033×10^{-12}	1.908343×10^{-15}	2.278926×10^{11}
1.0	4.388144×10^{-12}	2.537032×10^{-15}	2.278868×10^{11}
1.5	4.388226×10^{-12}	2.911301×10^{-15}	2.278825×10^{11}
2.0	4.388319×10^{-12}	3.282950×10^{-15}	2.278777×10^{11}
2.5	4.388423×10^{-12}	3.651645×10^{-15}	2.278723×10^{11}
3.0	4.388537×10^{-12}	4.017054×10^{-15}	2.278663×10^{11}
3.5	4.388664×10^{-12}	4.378847×10^{-15}	2.278598×10^{11}
4.0	4.388800×10^{-12}	4.736700×10^{-15}	2.278527×10^{11}
4.5	4.388948×10^{-12}	5.090290×10^{-15}	2.278450×10^{11}
5.0	4.389108×10^{-12}	5.439300×10^{-15}	2.278368×10^{11}
5.5	4.389284×10^{-12}	5.783414×10^{-15}	2.278281×10^{11}
6.0	4.389467×10^{-12}	6.122324×10^{-15}	2.278188×10^{11}

O próximo planeta, Júpiter, possui os dados na Tabela [3.7](#).

Tabela 3.7: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	1.284522×10^{-12}	0.000000×10^0	7.785000×10^{11}
0.5	1.284538×10^{-12}	$-6.152068 \times 10^{-16}$	7.784901×10^{11}
1.0	1.284605×10^{-12}	1.385392×10^{-15}	7.784496×10^{11}
1.5	1.284688×10^{-12}	1.957895×10^{-15}	7.783989×10^{11}
2.0	1.284752×10^{-12}	2.299138×10^{-15}	7.783602×10^{11}
2.5	1.284910×10^{-12}	2.975113×10^{-15}	7.782643×10^{11}
3.0	1.285038×10^{-12}	3.419963×10^{-15}	7.781869×10^{11}
3.5	1.285223×10^{-12}	3.968249×10^{-15}	7.780750×10^{11}
4.0	1.285435×10^{-12}	4.506617×10^{-15}	7.779467×10^{11}
4.5	1.285674×10^{-12}	5.033720×10^{-15}	7.778024×10^{11}
5.0	1.285938×10^{-12}	5.548242×10^{-15}	7.776423×10^{11}
5.5	1.286228×10^{-12}	6.048896×10^{-15}	7.774670×10^{11}
6.0	1.286543×10^{-12}	6.534431×10^{-15}	7.772769×10^{11}

Seguindo para o próximo planeta gasoso, Saturno, tem-se a Tabela 3.8.

Tabela 3.8: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	6.978367×10^{-13}	0.000000×10^0	1.433000×10^{12}
0.5	6.977318×10^{-13}	$-1.396059 \times 10^{-15}$	1.433215×10^{12}
1.0	6.977900×10^{-13}	$-9.326491 \times 10^{-16}$	1.433096×10^{12}
1.5	6.976315×10^{-13}	$-1.947443 \times 10^{-15}$	1.433422×10^{12}
2.0	6.976505×10^{-13}	$-1.855979 \times 10^{-15}$	1.433383×10^{12}
2.5	6.975463×10^{-13}	$-2.311261 \times 10^{-15}$	1.433597×10^{12}
3.0	6.974195×10^{-13}	$-2.760765 \times 10^{-15}$	1.433857×10^{12}
3.5	6.972703×10^{-13}	$-3.203370 \times 10^{-15}$	1.434164×10^{12}
4.0	6.970993×10^{-13}	$-3.637967 \times 10^{-15}$	1.434516×10^{12}
4.5	6.969067×10^{-13}	$-4.063471 \times 10^{-15}$	1.434912×10^{12}
5.0	6.966931×10^{-13}	$-4.478819 \times 10^{-15}$	1.435352×10^{12}
5.5	6.964590×10^{-13}	$-4.882972 \times 10^{-15}$	1.435835×10^{12}
6.0	6.962050×10^{-13}	$-5.274920 \times 10^{-15}$	1.436359×10^{12}

O próximo planeta, Urano, tem-se os dados calculados na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	3.483107×10^{-13}	0.000000×10^0	2.871000×10^{12}
0.5	3.483106×10^{-13}	$-4.406243 \times 10^{-18}$	2.871002×10^{12}
1.0	3.483105×10^{-13}	$-1.674778 \times 10^{-18}$	2.871001×10^{12}
1.5	3.483103×10^{-13}	$-2.491229 \times 10^{-18}$	2.871003×10^{12}
2.0	3.483102×10^{-13}	$-2.971665 \times 10^{-18}$	2.871004×10^{12}
2.5	3.483104×10^{-13}	$-3.514211 \times 10^{-18}$	2.871002×10^{12}
3.0	3.483103×10^{-13}	$-2.491229 \times 10^{-18}$	2.871003×10^{12}
3.5	3.483102×10^{-13}	$-5.014953 \times 10^{-18}$	2.871004×10^{12}
4.0	3.483101×10^{-13}	$-6.748350 \times 10^{-18}$	2.871004×10^{12}
4.5	3.483099×10^{-13}	$-5.344588 \times 10^{-18}$	2.871006×10^{12}
5.0	3.483097×10^{-13}	$-5.879543 \times 10^{-18}$	2.871008×10^{12}
5.5	3.483095×10^{-13}	$-6.422448 \times 10^{-18}$	2.871010×10^{12}
6.0	3.483094×10^{-13}	$-6.947969 \times 10^{-18}$	2.871011×10^{12}

E finalmente, para o planeta do sistema mais distante do Sol, Netuno, segue a Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Valores calculados para θ com intervalo de 0.5 rad

θ (rad)	u (1/m)	v_u (1/(m · rad))	r (m)
0.0	2.223210×10^{-13}	0.000000×10^0	4.498000×10^{12}
0.5	2.223235×10^{-13}	3.225220×10^{-17}	4.497951×10^{12}
1.0	2.223253×10^{-13}	4.287743×10^{-17}	4.497913×10^{12}
1.5	2.223341×10^{-13}	7.400526×10^{-17}	4.497735×10^{12}
2.0	2.223475×10^{-13}	1.034711×10^{-16}	4.497466×10^{12}
2.5	2.223677×10^{-13}	1.340231×10^{-16}	4.497056×10^{12}
3.0	2.223933×10^{-13}	1.611692×10^{-16}	4.496538×10^{12}
3.5	2.224253×10^{-13}	1.945536×10^{-16}	4.495879×10^{12}
4.0	2.224638×10^{-13}	2.335401×10^{-16}	4.495055×10^{12}
4.5	2.225087×10^{-13}	2.781968×10^{-16}	4.493206×10^{12}
5.0	2.225608×10^{-13}	3.286721×10^{-16}	4.490291×10^{12}
5.5	2.226202×10^{-13}	3.851243×10^{-16}	4.486360×10^{12}
6.0	2.226867×10^{-13}	4.477180×10^{-16}	4.481439×10^{12}

Além das tabelas, foram traçados gráficos de $r(\theta)$ para cada planeta. Começando com Mercúrio, segue a Figura 3.1.

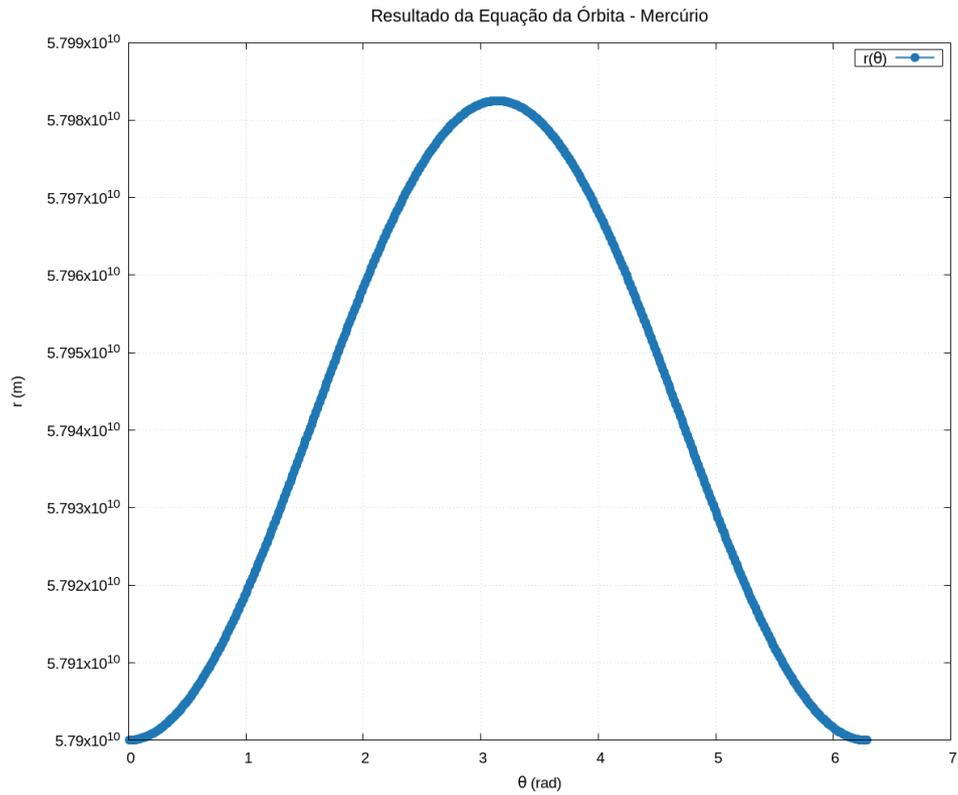


Figura 3.1: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

O próximo planeta é Vênus, cujo o gráfico esta na Figura 3.2.

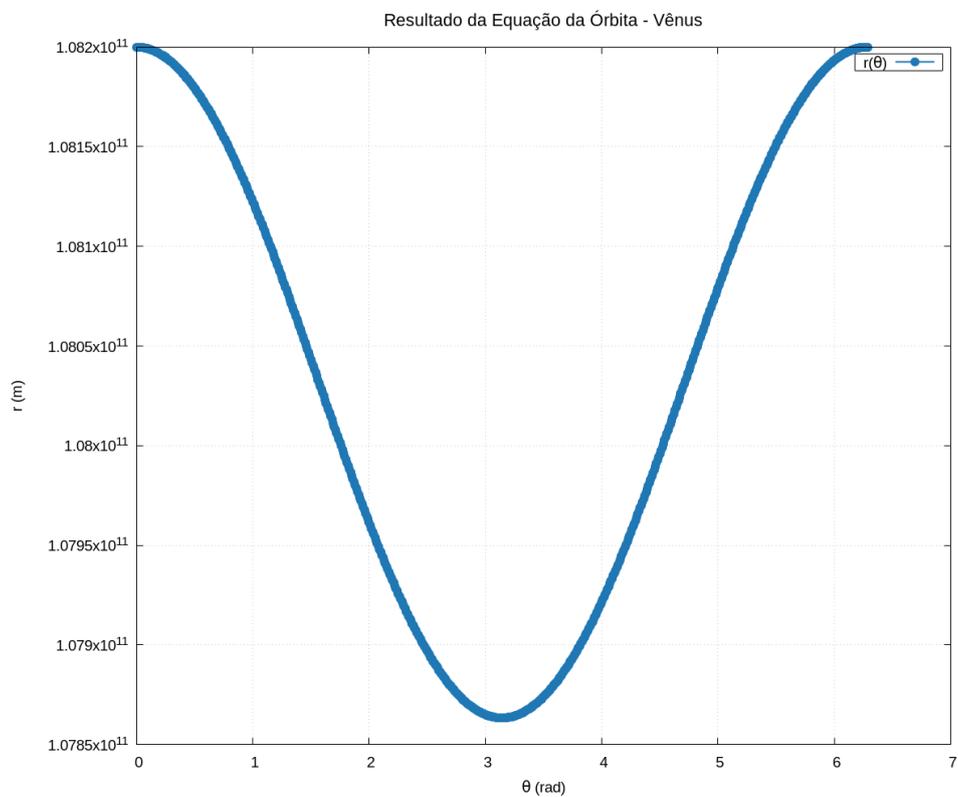


Figura 3.2: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

O terceiro planeta, Terra, possui gráfico na Figura 3.3.

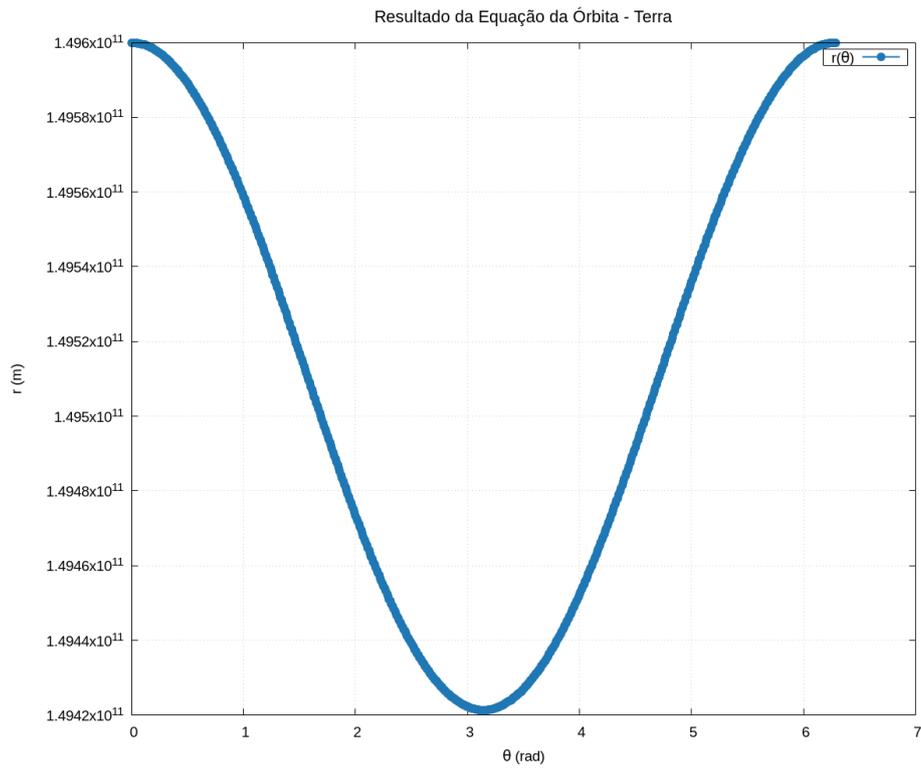


Figura 3.3: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

Seguindo, a Figura 3.4 é referente ao planeta Marte.

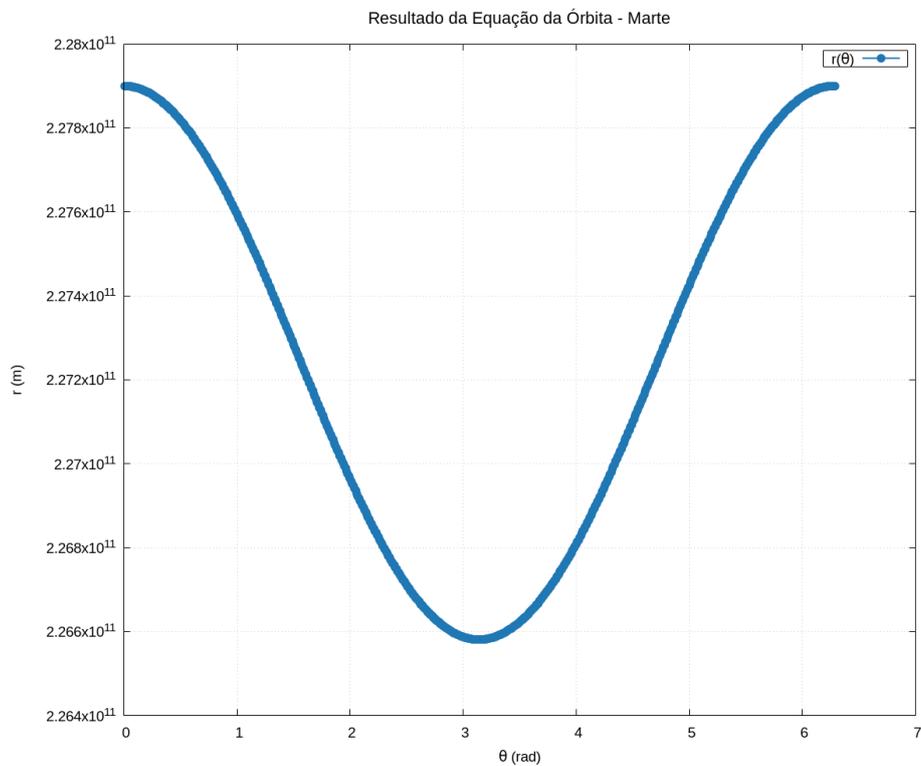


Figura 3.4: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

O planeta gasoso mais próximo do Sol, Júpiter, possui gráfico na Figura 3.5

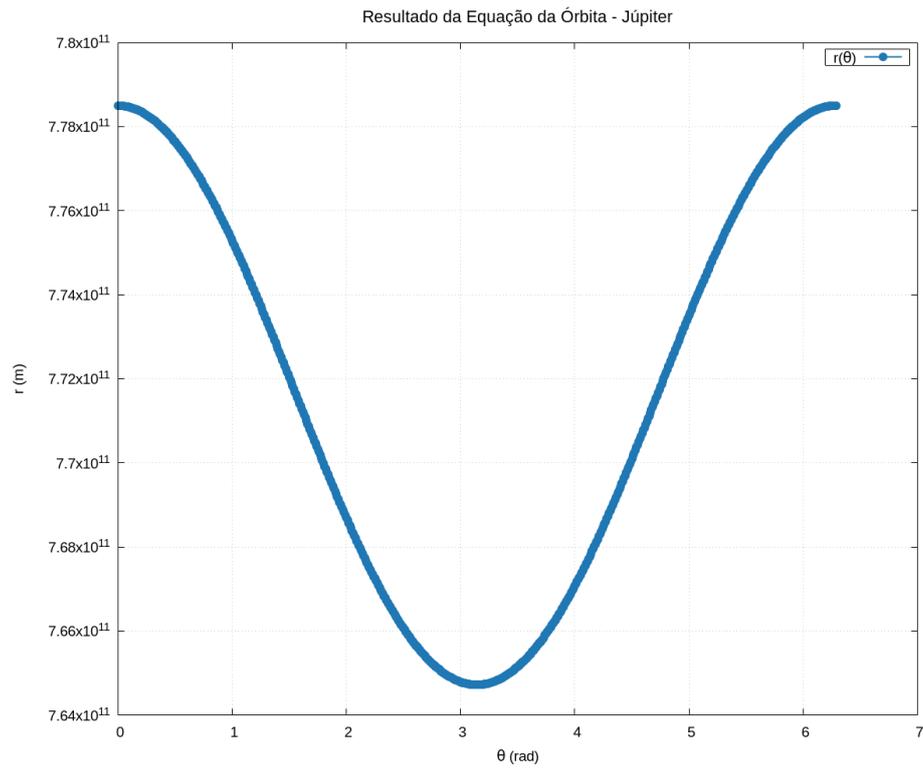


Figura 3.5: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

Seguindo a ordem, a Figura 3.6 mostra o gráfico do planeta Saturno.

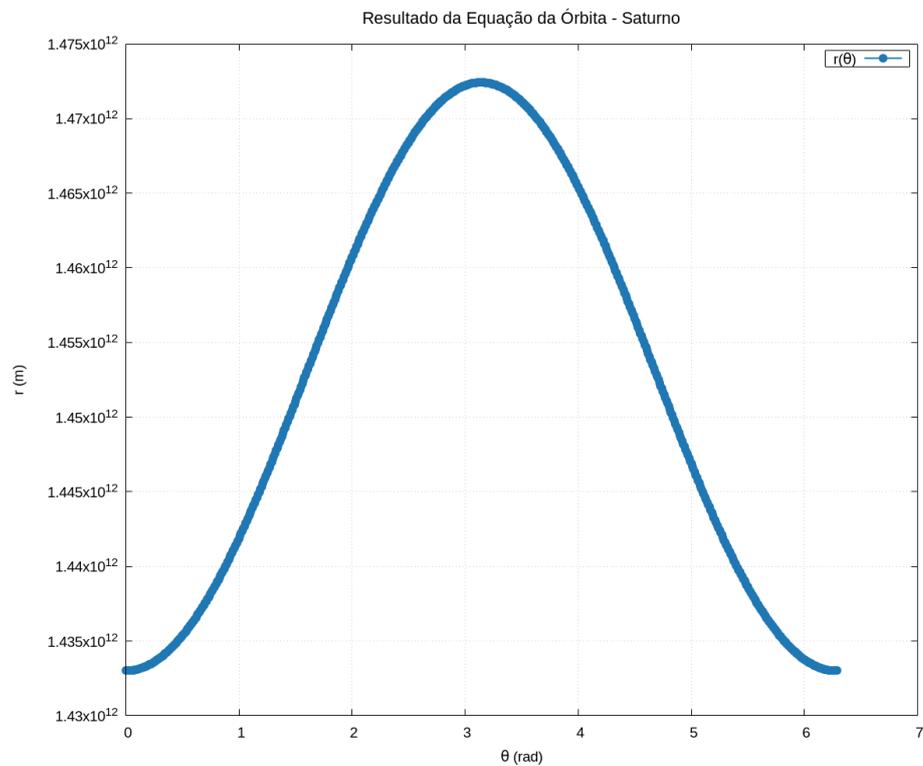


Figura 3.6: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

Além deles, o gráfico do planeta Urano pode ser encontrado na Figura 3.7.

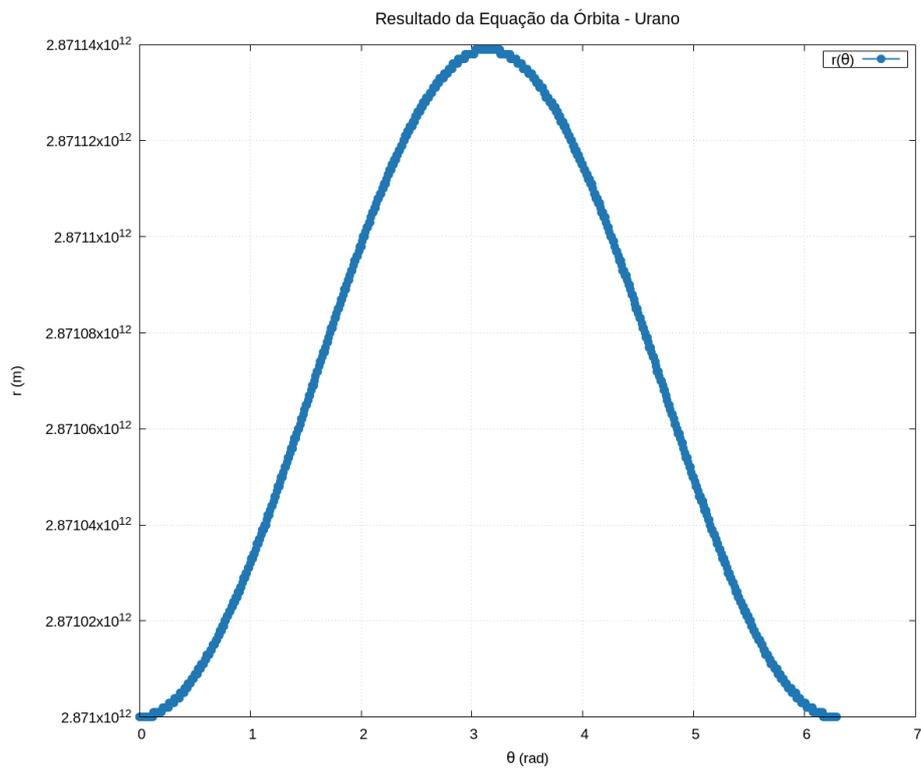


Figura 3.7: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

E por último, o gráfico do oitavo planeta, Netuno, está na Figura 3.8.

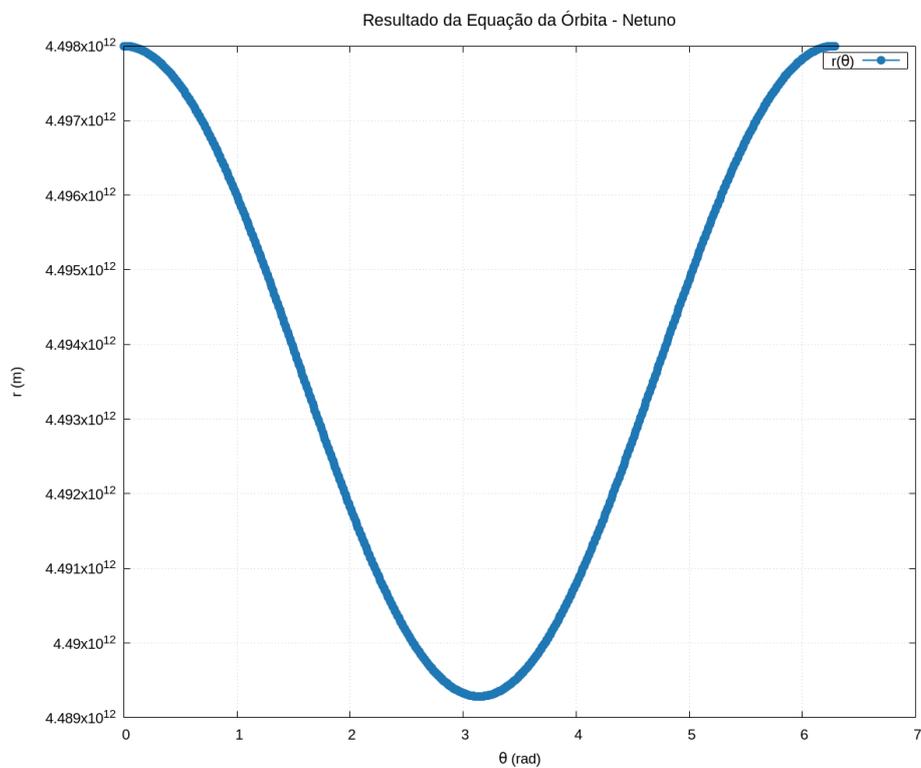


Figura 3.8: Gráfico de $r(\theta)$ com intervalo de 0.01 radianos

Para validar os valores calculados, foram feitas tabelas cujo objetivo é comparar os dados calculados com os dados reais. Utilizando o maior raio como semi-eixo maior (a) e o menor raio como semi-eixo menor (b) de uma elipse, pôde-se montar a Tabela 3.11 e a Tabela 3.12.

Tabela 3.11: Comparação de Semieixo Maior (a) dos Planetas

Planeta	a Calculado (m)	a Real (m)	Desvio Percentual (%)
Mercúrio	5.794125×10^{10}	5.791×10^{10}	0.054%
Vênus	1.080317×10^{11}	1.082×10^{11}	-0.156%
Terra	1.495107×10^{11}	1.496×10^{11}	-0.060%
Marte	2.272406×10^{11}	2.279×10^{11}	-0.290%
Júpiter	7.716104×10^{11}	7.785×10^{11}	-0.885%
Saturno	1.452712×10^{12}	1.433×10^{12}	1.376%
Urano	2.871070×10^{12}	2.872×10^{12}	-0.033%
Netuno	4.493642×10^{12}	4.498×10^{12}	-0.097%

Tabela 3.12: Comparação de Semieixo Menor (b) dos Planetas

Planeta	b Calculado (m)	b Real (m)	Desvio Percentual (%)
Mercúrio	5.794124×10^{10}	5.791×10^{10}	0.054%
Vênus	1.080316×10^{11}	1.082×10^{11}	-0.156%
Terra	1.495107×10^{11}	1.496×10^{11}	-0.060%
Marte	2.272396×10^{11}	2.279×10^{11}	-0.290%
Júpiter	7.715796×10^{11}	7.785×10^{11}	-0.885%
Saturno	1.452578×10^{12}	1.433×10^{12}	1.376%
Urano	2.871069×10^{12}	2.872×10^{12}	-0.033%
Netuno	4.493641×10^{12}	4.498×10^{12}	-0.097%

Usando dos dados acima, pode-se calcular a excentricidade a partir da equação

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (3.1)$$

desse modo, comparou-se a excentricidade calculada com a excentricidade bibliográfica na Tabela 3.13.

Tabela 3.13: Comparação de Excentricidade dos Planetas

Planeta	Excentricidade Calculada	Excentricidade Real	Desvio Percentual (%)
Mercúrio	7.119280×10^{-4}	0.2056	-99.65%
Vênus	1.557876×10^{-3}	0.0067	-76.76%
Terra	5.972817×10^{-4}	0.0167	-96.42%
Marte	2.901770×10^{-3}	0.0934	-96.89%
Júpiter	8.928858×10^{-3}	0.0483	-81.52%
Saturno	1.356876×10^{-2}	0.0541	-74.92%
Urano	2.420701×10^{-5}	0.0472	-99.95%
Netuno	9.698147×10^{-4}	0.0086	-88.72%

Além disso, fazendo uma média dos cálculos de r , substituindo na equação

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (3.2)$$

tem-se a comparação das velocidades médias, conforme Tabela 3.14.

Tabela 3.14: Comparação de Velocidade Média dos Planetas

Planeta	$\langle v \rangle$ Cal. (m/s)	$\langle v \rangle$ Real (m/s)	Desvio Percentual (%)
Mercúrio	4.786594×10^4	47 872	-0.02%
Vênus	3.505454×10^4	35 021	0.13%
Terra	2.979778×10^4	29 780	0.00%
Marte	2.417009×10^4	24 077	-0.24%
Júpiter	1.311690×10^4	13 070	0.05%
Saturno	9.560341×10^3	9 690	-1.34%
Urano	6.799836×10^3	6 800	0.00%
Netuno	5.435264×10^3	5 430	0.10%

E por fim, usando a média de r , também pode-se calcular o período orbital, utilizando da equação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \quad (3.3)$$

e assim, a comparação esta na Tabela 3.15.

Tabela 3.15: Comparação de Período Orbital dos Planetas

Planeta	T Cal. (s)	T Real (s)	Desvio Percentual (%)
Mercúrio	7.605739×10^6	$7.600\,543 \times 10^6$	0.07%
Vênus	1.936361×10^7	$1.941\,414 \times 10^7$	-0.26%
Terra	3.152594×10^7	$3.155\,814 \times 10^7$	-0.10%
Marte	5.907293×10^7	$5.935\,424 \times 10^7$	-0.47%
Júpiter	3.696211×10^8	$3.743\,268 \times 10^8$	-1.26%
Saturno	9.548358×10^8	$9.292\,608 \times 10^8$	2.75%
Urano	2.652926×10^9	$2.651\,370 \times 10^9$	0.06%
Netuno	5.194662×10^9	$5.200\,418 \times 10^9$	-0.11%

3.2 Cálculo das Órbitas Sol-Terra-Lua

Utilizando as condições iniciais apresentadas na Tabela 3.2, e $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ obteve-se os dados das posições para cada corpo. As posições do Sol são apresentados na Tabela 3.16.

Tabela 3.16: Posições do Sol ao longo do tempo

Tempo (s)	X (m)	Y (m)
0.0	0.000000×10^0	0.000000×10^0
1.200000×10^5	3.244999×10^{-5}	1.292420×10^{-10}
2.400000×10^5	1.297999×10^{-4}	1.033936×10^{-9}
3.600000×10^5	2.920499×10^{-4}	3.489535×10^{-9}
4.800000×10^5	5.191998×10^{-4}	8.271490×10^{-9}
6.000000×10^5	8.112497×10^{-4}	1.615525×10^{-8}
7.200000×10^5	1.168200×10^{-3}	2.791628×10^{-8}
8.400000×10^5	1.590049×10^{-3}	4.433002×10^{-8}
9.600000×10^5	2.076799×10^{-3}	6.617192×10^{-8}
1.080000×10^6	2.628449×10^{-3}	9.421744×10^{-8}

Já as posições do planeta Terra pode ser observado na [3.17](#).

Tabela 3.17: Posições da Terra ao longo do tempo

Tempo (s)	X (m)	Y (m)
0.0	1.496000×10^{11}	0.000000×10^0
1.200000×10^5	1.496000×10^{11}	1.786800×10^6
2.400000×10^5	1.496000×10^{11}	3.573600×10^6
3.600000×10^5	1.496000×10^{11}	5.360400×10^6
4.800000×10^5	1.496000×10^{11}	7.147200×10^6
6.000000×10^5	1.496000×10^{11}	8.934000×10^6
7.200000×10^5	1.496000×10^{11}	1.072080×10^7
8.400000×10^5	1.496000×10^{11}	1.250760×10^7
9.600000×10^5	1.496000×10^{11}	1.429440×10^7
1.080000×10^6	1.496000×10^{11}	1.608120×10^7

E por fim, as posições da Lua estão disponíveis na Tabela [3.18](#).

Tabela 3.18: Posições da Lua ao longo do tempo

Tempo (s)	X (m)	Y (m)
0.0	1.499844×10^{11}	0.000000×10^0
1.200000×10^5	1.499844×10^{11}	1.848120×10^6
2.400000×10^5	1.499844×10^{11}	3.696240×10^6
3.600000×10^5	1.499844×10^{11}	5.544360×10^6
4.800000×10^5	1.499844×10^{11}	7.392480×10^6
6.000000×10^5	1.499844×10^{11}	9.240600×10^6
7.200000×10^5	1.499844×10^{11}	1.108872×10^7
8.400000×10^5	1.499844×10^{11}	1.293684×10^7
9.600000×10^5	1.499844×10^{11}	1.478496×10^7
1.080000×10^6	1.499844×10^{11}	1.663308×10^7

Além das tabelas, também foram feitos gráficos demonstrando as posições dos corpos. A Figura [3.9](#) demonstra todos em conjunto.

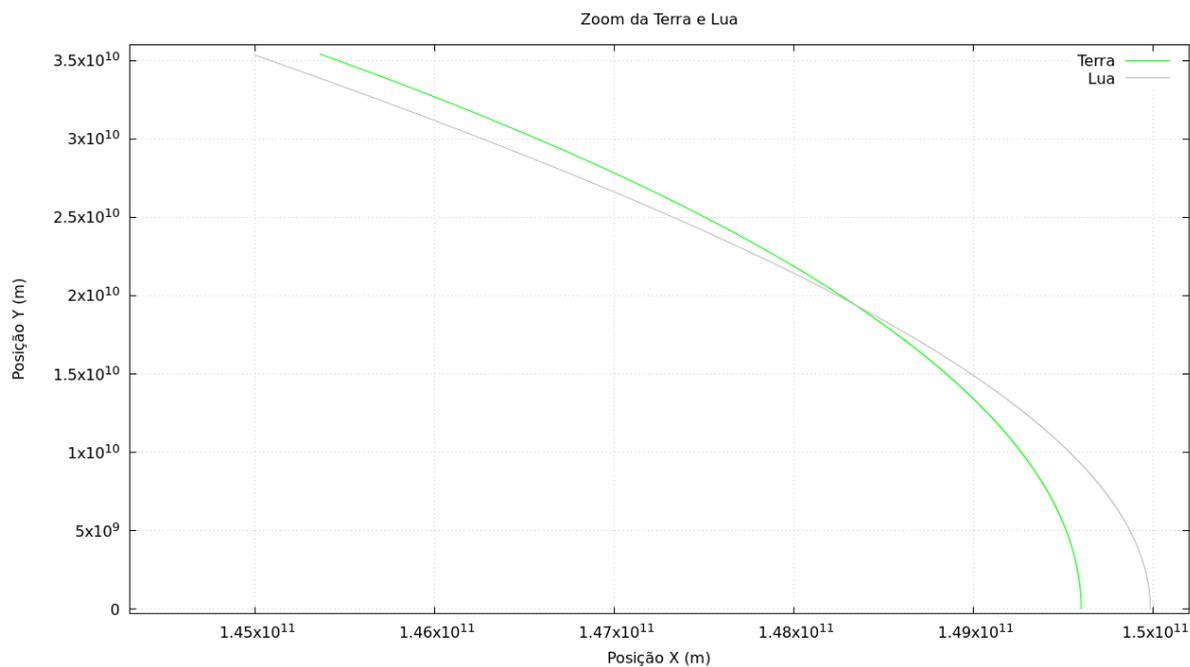


Figura 3.10: Gráfico ampliado nas trajetórias da Terra e da Lua em x e y .

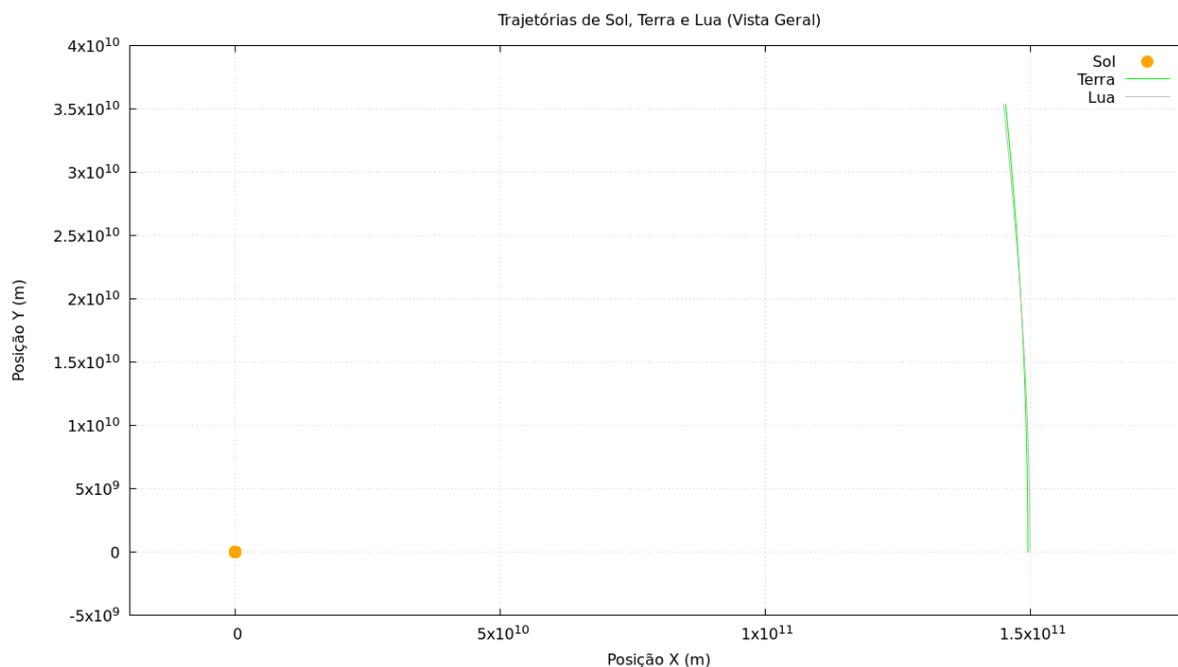


Figura 3.9: Gráfico mostrando as trajetórias dos corpos em x e y .

Diferentemente, a Figura 3.10 foca nas posições do planeta Terra em conjunto com a Lua.

E por último, quando feito um zoom é possível verificar que o Sol também se moveu nesse intervalo de tempo, conforme mostra Figura 3.11.

Para garantir a validade do cálculo anterior, é utilizado da Equação (1.50) para calcular

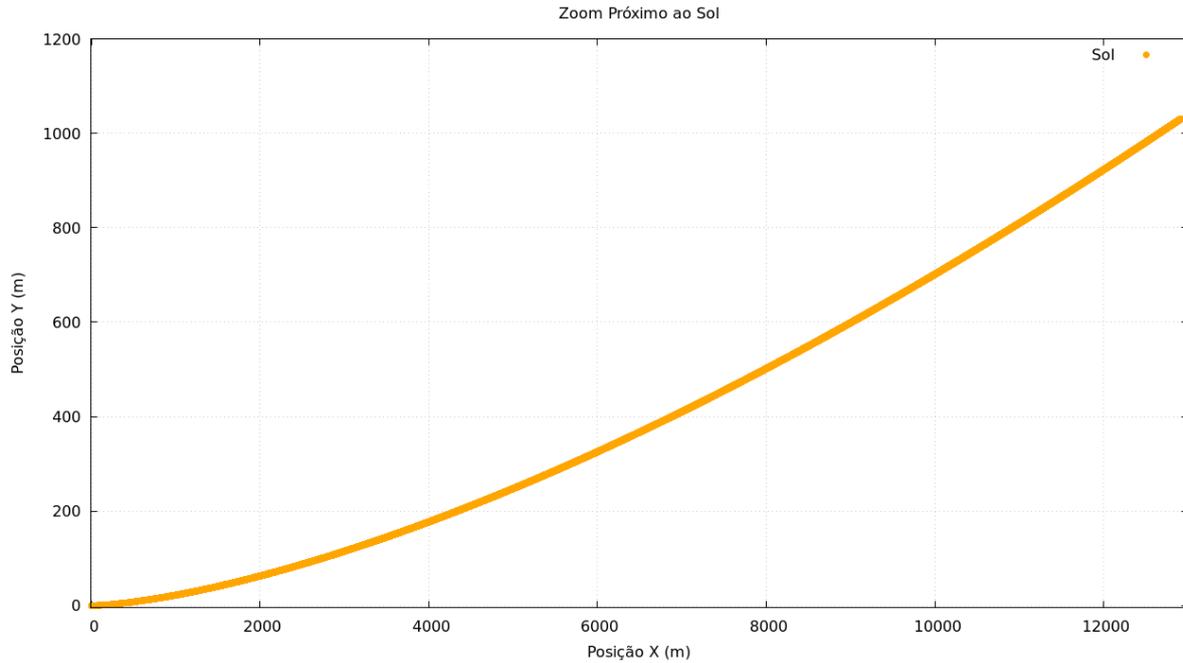


Figura 3.11: Gráfico ampliado na trajetória do Sol em x e y .

o valor da energia mecânica em cada passo, utilizando da energia cinética definida na Equação (1.49) e da energia potencial gravitacional definida na Equação (1.43).

Tabela 3.19: Energias calculadas em diferentes passos de tempo

Passo	Energia Cinética (J)	Energia Potencial (J)	Energia Total (J)
0	2.682958×10^{33}	-5.363137×10^{33}	-2.680178×10^{33}
2000	2.682958×10^{33}	-5.363137×10^{33}	-2.680178×10^{33}
4000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
6000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
8000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
10000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
12000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
14000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
16000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}
18000	2.682958×10^{33}	-5.363136×10^{33}	-2.680178×10^{33}

Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos a aplicação das leis fundamentais da mecânica celeste, com destaque para as leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal de Newton, em conjunto com o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), para analisar problemas orbitais.

Na Seção 3.1, validamos os resultados obtidos através das simulações comparando os dados calculados com os observacionais disponíveis em bancos científicos, como os da NASA. Essa etapa foi crucial para avaliar a precisão dos modelos numéricos implementados. Os resultados confirmaram a eficácia do método RK4 em descrever o comportamento orbital dos planetas, com valores amplamente consistentes com as previsões teóricas baseadas nas leis de Kepler e na gravitação de Newton.

Apesar disso, algumas discrepâncias foram identificadas, especialmente nos valores das excentricidades das órbitas. Essas diferenças podem ser atribuídas a simplificações no modelo, como a suposição de órbitas bidimensionais e perfeitamente elípticas, além da exclusão de fatores como inclinação orbital tridimensional, perturbações gravitacionais de outros corpos celestes e efeitos relativísticos. Tais limitações, embora esperadas em modelos simplificados, destacam áreas onde melhorias futuras são necessárias, especialmente para aplicações que requerem alta precisão, como missões interplanetárias.

A Tabela 3.2 demonstra a conservação da energia mecânica ao longo dos cálculos numéricos para as órbitas do sistema Sol-Terra-Lua, evidenciando que o método RK4 não apenas fornece resultados consistentes, mas também respeita princípios fundamentais da mecânica celeste. Essa consistência reforça a validade das abordagens numéricas utilizadas neste trabalho.

Para trabalhos futuros, propomos a inclusão de efeitos relativísticos, forças não gravitacionais, como o vento solar, e modelagens tridimensionais das órbitas. Além disso, o método RK4 pode ser estendido para sistemas mais complexos, como aglomerados globulares e formações planetárias, utilizando dados observacionais avançados. Essas iniciativas permitirão aprimorar ainda mais a precisão dos modelos e expandir sua aplicabilidade a problemas dinâmicos de maior escala e complexidade, enriquecendo o campo da mecânica celeste e contribuindo para estudos astronômicos avançados.

Referências Bibliográficas

- [1] R. P. Feynman; R. B. Leighton; M. L. Sands. Newton's Laws of Dynamics: planetary motions. In: R. P. Feynman; R. B. Leighton; M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Nova York: Basic Books, 2011.
- [2] N. Copérnico. *Sobre as Revoluções dos Corpos Celestes*. Tradutor: C. B. da Silva. São Paulo: Editora da Unesp, 2018.
- [3] J. Kepler. *Nova Astronomia*. Tradutor: C. Mílio. São Paulo: Edusp, 1997.
- [4] C. C. Pereira; A. M. Velásquez-Toribio. A Terceira Lei de Kepler em diferente escalas: de luas até galáxias. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 46, n e20230329, mar. 2024. DOI: [10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0329](https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0329).
- [5] J. Gleick. *Isaac Newton*. New York: Vintage Books, 2004.
- [6] I. Newton. *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Tradutor: B. de Oliveira. São Paulo: Editora Unesp, 2017.
- [7] A. Teterleva; G. Faulconbridge. Rússia lança primeiro foguete espacial pós-soviético Angara-A5. *Agência Brasil*, abr. 2024. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/internacional/noticia/2024-04/russia-lanca-primeiro-foguete-espacial-angara-a5>. Acesso em: 07/07/24.
- [8] M. White. *Isaac Newton: O Último Feiticeiro*. Tradutor: S. Flaksman. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- [9] E. N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. In: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963. v. 20, n. 2, p. 130-141.
- [10] C. W. Misner; K. S. Thorne; J. A. Wheeler. *Gravitation*. New York: W. H. Freeman, 1973.
- [11] NASA. NASA Solar System Dynamics NASA. Disponível em: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>. Acesso em: 7/06/24.
- [12] C. A. de P. Rosa. *História da ciência : a ciência moderna*. 2. ed. Brasília : FUNAG, 2012.
- [13] W. Bynum. *Uma Breve História da Ciência*. Porto Alegre: L&PM Editores, 2014. Tradutor: I. Abreu.

- [14] M. H. O. Lopes; W. Lopes. Aplicações da Astronomia e da Geometria na Grécia Antiga. In: *Integração: ensino, pesquisa, extensão*. São Paulo: Centro de Pesquisa da Universidade São Judas Tadeu, ano XX, n.66, p. 46-49, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ganzarolli-De-Oliveira/publication/315752044_Pierre_Villey_e_o_mundo_dos_cegos_relato_de_uma_ausencia/links/58e21abdaca272059ab08fd9/Pierre-Villey-e-o-mundo-dos-cegos-relato-de-uma-ausencia.pdf#page=46. Acesso em: 27/12/24.
- [15] J. Steiner. Origem do Universo e do Homem. In: *Estudos avançados*, v. 20, n. 58, p. 231-248, dez. 2006. DOI: [10.1590/S0103-40142006000300022](https://doi.org/10.1590/S0103-40142006000300022).
- [16] A. Berry. *A Short History of Astronomy*. Londres: John Murray, 1898.
- [17] Esquema epiciclo-deferente idealizado por Ptolomeu onde C representa centro no qual o planeta gira Fonte: (BRAGA; GUERRA; REIS, 2003, p.65). *ResearchGate*, s.d. Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Figura-9-Esquema-epiciclo-deferente-idealizado-por-Ptolomeu-onde-C-representa-centro-no-qual-o-planeta-gira-Fonte-BRAGA-GUERRA-REIS-2003-p-65-fig2_277195045. Acesso em: 26/12/24.
- [18] L. Mesquita. Lista de Exercícios sobre heliocentrismo. *Brasil Escola*, s.d. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-geografia/exercicios-sobre-heliocentrismo.htm>. Acesso em: 26/12/24.
- [19] M. J. Reid; K. M. Menten. The First Stellar Parallaxes Revisited. In: *Astronomical Notes*, v. 341, n.9, p. 860-869, nov. 2020. DOI: [10.1002/asna.202013833](https://doi.org/10.1002/asna.202013833).
- [20] D. Fin. Leis de Kepler: tudo o que você precisa saber. *Aprova Total*, 2020. Disponível em: <https://aprovatotal.com.br/leis-de-kepler/>. Acesso em: 26/12/24.
- [21] S. Hawking. *On the Shoulders of Giants*. Philadelphia: Running Press, 2002.
- [22] A. Martins. Edmond Halley - GEA. *Grupo de Estudos Astronômicos*. s.d. Disponível em: <https://www.gea.org.br/personagens/edmond-halley/>. Acesso em: 27/12/24.
- [23] O. Gal. *The Origins of Modern Science*. Padstow Cornwall: TJ Books Limited, 2021.
- [24] J. H. Guzman. Equação de uma Elipse com Exemplos. *NEUROCHISPAS*, s.d. Disponível em: <https://br.neurochispas.com/pre-calculo/equacao-de-uma-elipse-com-exemplos/>. Acesso em: 26/12/24.
- [25] G. Galilei. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Nova Iorque: The MacMillan Company, 1914.
- [26] R. Dugas. *A History of Mechanics*. London: Routledge & Kegan Paul LTD., 1955.
- [27] A. K. T. Assis; C.P. Magnaghi. *O Método Ilustrado de Arquimedes: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade*. Quebec: C. Roy Keys Inc, 2014.
- [28] C. M. Porto. A história do problema das colisões na física do século XVII anterior a Newton. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física*. v. 42, jun. 2020. DOI: [10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0004](https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0004).

- [29] Bala de canhão de Newton Gravitação Terra Pensamento Experimento Rodada, terra, png. *PNGWING*. Disponível em: https://www.pngwing.com/pt/free-png-xssnm#google_vignette. Acesso em: 26/12/24.
- [30] H. Cavendish. Experiments to Determine the Density of the Earth. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. London, v. 88, p. 469-526, jun. 1798.
- [31] G. Rizzo. Velocidade de escape. *Guilherme Rizzo*, 2012. Disponível em: <https://rizzofisico.wordpress.com/tag/velocidade-de-escape/>. Acesso em: 26/12/24.
- [32] NASA. 1P/Halley. *NASA*. s.d. Disponível em: <https://science.nasa.gov/solar-system/comets/1p-halley/>. Acesso em: 28/12/24.
- [33] Momento angular. *InfoEscola*, s.d. Disponível em: <https://www.infoescola.com/mecanica/momento-angular/>. Acesso em: 26/12/24.
- [34] J. E. Barrow-Green. *Poincaré and the Three Body Problem*. The Open University, 1993. Tese (Pós Doutorado). Departamento de Matemática, The Open University, Milton Keynes, 1993. Disponível em: <https://oro.open.ac.uk/57403/1/335423.pdf>. Acesso em: 28/12/24.
- [35] Z. E. Musielak; B. Quarles. The three-body problem. In: *Reports on Progress in Physics*, v. 11, n. 6, jun. 2014. DOI: [10.1088/0034-4885/77/6/065901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/6/065901).
- [36] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Sussex Ocidental: John Wiley & Sons Ltda, 2008.
- [37] S. C. Chapra. *Applied Numerical Methods with MATLAB*. 5. ed. Nova Iorque: McGraw Hill LLC, 2023.
- [38] D. R. Williams. Planetary Fact Sheet - Metric. *NASA*, 2024. Disponível em: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>. Acesso em: 29/12/24.