



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

# **Gravitação - Revisão Histórica e Estudo das Teorias de Newton e Einstein**

Acadêmica: Yasmin Tami Fialho

Orientador: Prof. Dr. André Marino Gonçalves

Maringá, 25 de janeiro de 2025



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## **Gravitação - Revisão Histórica e Estudo das Teorias de Newton e Einstein**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. André Marino Gonçalves, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmica: Yasmin Tami Fialho

Orientador: Prof. Dr. André Marino Gonçalves

Maringá, 25 de janeiro de 2025

# Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Introdução	1
<b>1 História da Gravitação</b>	<b>2</b>
1.1 Os Primeiros Filósofos e suas Contribuições	2
1.2 A Visão Aristotélica dos Movimentos	3
1.3 O Modelo Geocêntrico de Ptolomeu	5
1.4 O Sistema Heliocêntrico de Copérnico	6
1.5 As leis de Kepler	9
1.6 Galileu Galilei	11
1.6.1 O Desenvolvimento do Telescópio e suas Descobertas	11
1.6.2 Galileu e a Condenação do Sistema Copernicano pela Igreja	13
1.6.3 Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo	14
1.6.4 O Estudo dos Movimentos e o Método Experimental	15
1.7 Isaac Newton e a Unificação dos Movimentos Celestes e Terrestres	16
1.7.1 Vida de Isaac Newton	16
1.7.2 As Contribuições de Newton	17
1.7.3 A História da Maçã e a Formulação da Lei da Gravitação Universal	18
1.7.4 A Nova filosofia	22
1.8 O Surgimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR)	23
1.8.1 Antes da Teoria da Relatividade Restrita	24
1.9 A Teoria da Relatividade Geral: Uma Nova Visão da Gravidade	25
1.9.1 O Princípio de Equivalência	25
1.9.2 A Gravidade e a Curvatura do Espaço-tempo	26
1.9.3 A Geometria e a Colaboração de Marcel Grossmann	27
1.9.4 A Anomalia da Órbita de Mercúrio	27
1.9.5 Confirmação da Teoria da Relatividade Geral	27
1.9.6 A Gravitação	28
<b>2 A lei da Gravitação Universal</b>	<b>29</b>
2.1 As Leis do Movimento de Newton	29
2.1.1 A Primeira Lei de Newton (Lei da Inércia)	29
2.1.2 A Segunda Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica)	30
2.1.3 A Terceira Lei de Newton (Ação e reação)	30
2.2 As Três Leis de Kepler	30
2.2.1 Primeira Lei de Kepler - Lei das órbitas elípticas	30

2.2.2	Segunda Lei de Kepler - Lei das áreas . . . . .	31
2.2.3	Terceira Lei de Kepler - Lei Harmônica . . . . .	32
2.3	Lei da Gravitação para Órbitas Circulares . . . . .	32
2.4	A Gravitação Universal . . . . .	33
2.5	Leis de Kepler Generalizadas . . . . .	34
2.5.1	Conservação da Energia Total do Sistema . . . . .	35
2.5.2	Conservação do momento angular . . . . .	37
2.5.3	A Primeira Lei de Kepler . . . . .	37
2.5.4	Segunda Lei de Kepler . . . . .	42
2.5.5	Terceira Lei de Kepler: A Constante K . . . . .	43
2.5.6	Problema de N corpos . . . . .	47
2.5.7	Satélites Artificiais . . . . .	48
2.5.8	Forças Gravitacionais . . . . .	48
2.5.9	O valor da Constante G . . . . .	57
2.5.10	Validade Além do Sistema Solar . . . . .	57
2.6	Críticas e Limitações da Teoria Newtoniana . . . . .	57
<b>3</b>	<b>A Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>60</b>
3.1	Introdução à TRG . . . . .	60
3.2	Princípio de Equivalência . . . . .	60
3.3	Princípio da Covariância . . . . .	62
3.3.1	Tensor de ordem superior . . . . .	63
3.4	Tensor Métrico . . . . .	64
3.5	Cálculo Tensorial . . . . .	65
3.5.1	Derivada Covariante . . . . .	66
3.5.2	Transporte Paralelo e Geodésicas . . . . .	67
3.5.3	Tensor de Riemann . . . . .	69
3.6	Equação de Campo . . . . .	70
3.6.1	Periélio de Mercúrio . . . . .	73
3.6.2	Velocidade de Escape na Relatividade . . . . .	75
3.6.3	Sistema de Posicionamento Global(GPS) . . . . .	76
3.7	Futuro da Gravitação . . . . .	79
	<b>Considerações Finais</b>	<b>80</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Agradecimentos

Agradeço ao professor André Marino Gonçalves pela orientação, paciência e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também aos membros da banca examinadora, Hatsumi Mukai e Miguel Jorge Bernabé Ferreira, por dedicarem seu tempo e pelas contribuições que enriqueceram este trabalho.

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá (UEM) e ao Departamento de Física (DFI) por tudo que proporcionaram ao longo da minha jornada acadêmica. Minha sincera gratidão ao Museu Dinâmico Interdisciplinar da UEM (MUDI), que contribuiu significativamente para minha evolução acadêmica e pessoal.

Aos meus pais, meu profundo agradecimento pelo apoio incondicional, amor e carinho constante, que foram fundamentais para que eu superasse os desafios encontrados durante a graduação.

Aos meus irmãos, sou grata pelo apoio e por proporcionarem momentos de distração.

Ao meu namorado, André Resun, agradeço pela presença, pelo incentivo e pelo cuidado, que tornaram os meus dias mais agradáveis.

Por fim, expresso minha gratidão aos meus amigos e colegas que me acompanharam ao longo da graduação, especialmente à Emily e o Andrey por estarem sempre comigo, me incentivando e pelos momentos de diversão.

# Resumo

A gravitação, uma das interações fundamentais do Universo, desempenha um papel essencial na compreensão dos fenômenos naturais, desde o cotidiano até as escalas cosmológicas. Este trabalho apresenta uma revisão da história da gravitação que abrange desde as concepções antigas até a formulação da Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton, culminando na transição para a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. O objetivo foi investigar a evolução conceitual dessas teorias, analisando suas contribuições, limitações e implicações. A metodologia incluiu a análise qualitativa de fontes históricas e acadêmicas, aliada a deduções matemáticas. Neste trabalho foi possível concluir que a gravitação é um campo ativo e fundamental para o entendimento do Universo.

**Palavras chave:** história da gravitação, gravitação, relatividade geral.

# Introdução

A Gravitação constitui uma das interações fundamentais que governam o movimento dos corpos celestes e as estruturas do Universo. Desde a antiguidade, filósofos e cientistas buscaram compreender esse fenômeno, cuja interpretação evoluiu de explicações filosóficas para modelos matemáticos, capazes de descrever desde as órbitas planetárias até fenômenos extremos, como a formação de buracos negros e a expansão do Universo.

Este trabalho teve como objetivo realizar uma revisão histórica do conceito de gravitação, analisando as contribuições de pensadores e cientistas, como Aristóteles, Ptolomeu, Copérnico, Kepler, Galileu, Newton e Einstein. Além disso, buscou-se examinar como as teorias da gravitação de Newton e Einstein se relacionam, oferecendo soluções para questões fundamentais, como as órbitas planetárias, o funcionamento de satélites artificiais e precisão de sistemas de navegação, como o Sistema de Posicionamento Global (GPS).

O estudo discute a generalização das leis de Kepler por Isaac Newton, ao demonstrar como que estas derivam diretamente da Lei da Gravitação Universal, e a introdução dos tensores na Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, que revolucionou a compreensão dos campos gravitacionais intensos e dos regimes relativísticos, corrigindo as limitações da teoria newtoniana.

A relevância desse estudo reside na análise da evolução histórica das ideias, destacando como essas teorias foram construídas a partir das contribuições de inúmeros pensadores e cientistas ao longo dos séculos. Esse processo colaborativo não apenas impulsionou avanços significativos na física, mas também transformou a sociedade por meio de aplicações. Desde a exploração espacial até tecnologias essenciais para navegação, as teorias da gravitação continuam a desempenhar um papel fundamental na compreensão do Universo.

A metodologia utilizada baseou-se em uma revisão bibliográfica abrangente, contemplando livros e artigos que exploram a história, os fundamentos teóricos e matemáticos das teorias da gravitação, bem como suas implicações e aplicações práticas.

O trabalho foi estruturado em três capítulos. No [Capítulo 1](#) apresenta-se uma revisão histórica da gravitação, abrangendo as ideias desde tempos longínquos até as formulações de Newton e Einstein. no [Capítulo 2](#), explora-se a teoria Newtoniana, abordando seus conceitos fundamentais e aplicações. Por fim, no [Capítulo 3](#), analisou-se a elegante matemática da Relatividade Geral, incluindo uma revisão das equações de campo, sua solução e aplicações, além de futuras investigações relacionadas à gravitação.

# Capítulo 1

## História da Gravitação

Este capítulo explora a evolução do entendimento da gravitação, desde as primeiras ideias filosóficas até as teorias modernas, mostrando como cada pensador contribuiu para o desenvolvimento da gravitação.

### 1.1 Os Primeiros Filósofos e suas Contribuições

A história do pensamento humano sobre a gravidade remonta à antiguidade, quando filósofos gregos começaram a investigar a natureza. Por meio de símbolos e narrativas divinas, os pensadores buscavam compreender as transformações e os "movimentos observáveis". Embora não tratassem a gravidade explicitamente, alguns mitos e religiões compartilham a ideia de um "par primordial" constituído pela Terra e o Céu.

Para os filósofos antigos, a separação da Terra e do Céu refletia uma tentativa de entender a natureza. Por meio do esforço para compreender os movimentos, surgiram os primeiros conceitos fundamentais.

Aristóteles foi um dos primeiros a estabelecer explicações sobre os movimentos que continuariam a evoluir ao longo dos séculos. Contudo, vale destacar que as ideias de Aristóteles não foram totalmente originais. Ele se destacou por compilar e sistematizar as ideias de outros filósofos antigos em seu modelo geocêntrico [1].

Tales de Mileto ( 624 - 546 a.C.) foi um filósofo pré-socrático que apresentou a ideia de que a Terra era um disco plano em meio a vasta extensão de água. Para Tales, tudo no Universo era composto por água. Essa abordagem representou uma tentativa de buscar explicações racionais para os fenômenos observados no cosmos.

Anaximandro ( 610 - 546 a.C.) Discípulo de Tales de Mileto, foi um dos primeiros filósofos a propor um modelo baseado nos movimentos dos corpos celestes.

Pitágoras de Samos ( 572 - 497 a.C.) trouxe uma contribuição significativa ao propor a esfericidade da Terra, da Lua e de outros corpos celestes. Ele enfatizou a importância da matemática na descrição e compreensão do cosmos. Seus seguidores foram os primeiros a utilizar o termo *Cosmos* para se referirem ao Universo, conceito que significava simetria, ordem e beleza.

Platão (428 -347 a.C.) teve uma contribuição fundamental para a compreensão do cosmos. Ele acreditava que o mundo era uma esfera perfeita, simbolizando harmonia e perfeição. Platão introduziu a ideia de movimento circular e o conceito das esferas celestes, organizando os planetas em uma ordem matemática. Além disso, ele associou figuras geométricas perfeitas na ordem planetária.

Eudoxo de Cnidos (408 - 344 a.C.) desenvolveu um modelo cosmológico baseado na visão platônica, no qual propôs um sistema de esferas concêntricas girando em torno da Terra, considerada fixa no centro do cosmos.

Hiparco de Nicéia (160 - 125 a.C.), considerado o maior astrônomo da era pré-cristã, realizou contribuições significativas, como a elaboração de um catálogo com as posições no céu e as magnitudes de 850 estrelas, classificando-as em uma escala de seis categorias, na qual a primeira representava as estrelas mais brilhantes e a sexta as menos brilhantes visíveis a olho nu.

Adicionalmente, Hiparco deduziu corretamente a direção dos polos celestes e identificou a variação na direção do eixo de rotação da Terra pela influência gravitacional da Lua e do Sol.

Essas contribuições foram fundamentais para a compreensão dos movimentos, influenciando diretamente o pensamento posterior, especialmente no modelo de Aristóteles.

## 1.2 A Visão Aristotélica dos Movimentos

Conforme descrito por Panek [2], assim como seus antecessores, Aristóteles examinou o reino terrestre e o celestial baseando-se na teoria de Empédocles, que sustentava a existência de quatro elementos fundamentais da matéria no mundo observável: água, ar, terra e fogo. Esses elementos apresentavam uma tendência natural de movimento.

Quando os antigos tentaram compreender o movimento da matéria na Terra, observaram a partir da velocidade da queda dos corpos. Eles constataram que os objetos mais pesados caíam rapidamente, como a terra, e quanto os mais leves caíam lentamente, como a água, propondo uma única direção de movimento. Aristóteles, baseado em evidências sensoriais, considerava esta ideia incompleta. A ideia não poderia ser aplicada a elementos como o fogo e o ar. Ao invés de caírem, esses elementos subiam. Consequentemente, Aristóteles concluiu que haviam dois movimentos fundamentais na natureza: para baixo e para cima [2].

Diante dessas observações, descreveu uma matéria leve como “aquilo que se move para cima ou para a extremidade”. Dessa forma a definição de matéria pesada seria “aquilo que se move para baixo ou para o centro”. Elementos como a terra e a água, por serem pesados, seus movimentos tinham a tendência de voltar em movimento retilíneo para baixo para o lugar natural, o centro da Terra [2]. Em contraste, os elementos leves, como o ar e o fogo, tinham um movimento retilíneo para cima em direção às extremidades do Universo.

Além desses movimentos naturais, existiam os movimentos considerados violentos. Esses movimentos ocorrem quando o objeto é forçado a se mover de maneira contrária ao seu movimento natural, por exemplo, um lançamento de uma pedra para cima é considerado um movimento violento [3].

Aristóteles fundamentou suas ideias nas concepções de filósofos gregos anteriores e de sua época, como Parmênides, Pitágoras e Eudoxo, que defendiam a ideia de que a Terra era o centro do cosmos e adotavam o modelo das esferas concêntricas [1]. A partir dessas influências, Aristóteles, ao estudar os movimentos dos elementos, concluiu que o centro da Terra, sendo o lugar natural para onde os corpos pesados tendem a se mover, deveria ser considerado o centro do Universo [3].

Utilizando a lógica, os elementos apresentavam uma organização hierárquica em camadas concêntricas com a Terra. Os objetos leves, se deslocavam para a extremidade do Universo. Segundo Panek [2], Aristóteles propôs que o Universo seria esférico e limitado,

uma vez que, dentre as figuras, a esfera é considerada perfeita e limitada, sendo a única figura que durante a rotação contínua, permanece no mesmo lugar. Considerou a Terra como o centro do Universo e nove esferas giravam em torno dela, incluindo a primeira esfera, a Lua. As estrelas eram fixadas nas extremidades da última esfera conforme a Figura 1.2. A tendência dos movimentos levou a Aristóteles a concluir que a Terra permanecia inerte no centro de sua estrutura cosmológica, pois a Terra também possuía um lugar natural.

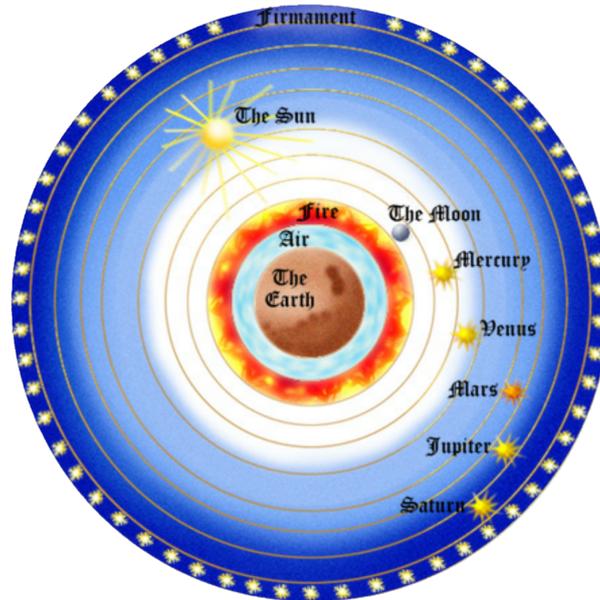


Figura 1.1: Representação do modelo cosmológico de Aristóteles.  
Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

Ao observar o céu, Aristóteles percebeu que os corpos celestes não apresentavam um movimento retilíneo, esses objetos pareciam ter um movimento circular em relação à Terra, conforme também defendido por filósofos como Platão e Eudoxo [1]. Esses movimentos eram perfeitos e constantes, e Aristóteles concluiu que deveriam possuir um elemento distinto daqueles que haviam na Terra, que os permitiam se moverem em círculos, uma substância perfeita e imutável, o éter, denominado de “quintessência” [3] [2].

Aristóteles utilizou a lógica e observação dos corpos celestes para sustentar a ideia que o Universo era composto por dois domínios distintos, denominados Sublunar, situado na esfera abaixo da Lua, e Supralunar, situado na esfera acima dela.

Dessa forma, concluiu-se que o mundo supralunar era composto por uma substância distinta do mundo terrestre, o éter, que permitia o movimento circular dos corpos celestes perfeitos e contínuos. Por esta razão, definiu-o como um reino indestrutível e imutável [2]. O mundo sublunar, era composto por quatro elementos fundamentais: água, ar, terra e fogo citados anteriormente. Esses elementos estavam sujeitos a alterações e tinham um movimento retilíneo para cima e para baixo, logo, o mundo terrestre era corruptível devido a transformações desses elementos.

Essa perspectiva separou os dois mundos, e exerceu uma grande influência até a era moderna, sendo estudada por diversos pensadores e, posteriormente, substituída por suas ideias, como Copérnico e seu modelo heliocêntrico.

### 1.3 O Modelo Geocêntrico de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, último dos pensadores gregos, viveu entre os séculos I e II d. C. O matemático e astrônomo greco-romano contribuiu com a sua obra *Mathematike Syntaxis* em que sintetizou o conhecimento astronômico de pensadores como Aristóteles e Hiparco. Esta obra foi chamada de “*Almagesto*”, do árabe, “O maior de todos”, composta por 13 livros. Dentre as contribuições astronômicas em sua obra, a teoria geocêntrica foi a mais importante para o futuro da ciência [4].

Sabe-se que Ptolomeu foi inspirado pelas ideias de Platão, Aristóteles e Hiparco e cabe destacar que pouco se sabe qual parte do *Almagesto* constitui uma contribuição original de Ptolomeu. Segundo Weinberg (2015) [5], os conceitos matemáticos epiciclo e excêntrico eram conhecidos por Hiparco, na qual foi descrito nos textos de Ptolomeu. A principal contribuição de Ptolomeu foi a introdução do ponto equante.

Os filósofos e astrônomos gregos buscavam uma teoria que explicasse de maneira mais precisa os movimentos dos planetas, que por sua vez, apresentavam um movimento retrógrado, momento em que, vistos da Terra, pareciam mover-se em direção oposta à dos demais corpos celestes. Para explicar esses movimentos, tiveram que utilizar ideias como excêntrico, os epiciclos e o equante [4]. O modelo geocêntrico de Ptolomeu, baseado nas ideias da época, como as de Aristóteles, representou uma inovação da teoria da órbita dos planetas, constituído por esferas concêntricas e um cosmo finito. Assim, sua teoria estabelece que cada planeta gira num círculo chamado de epiciclo, que determinaria a longitude de um planeta, em volta de um ponto móvel que gira em torno da Terra em outro círculo maior, conhecido como deferente. Considerou como deferente um círculo excêntrico e adicionou um ponto imaginário com respeito ao qual a rotação do planeta era constante, chamado de ponto equante e acomodou os movimentos irregulares vistos da Terra. Conforme ilustrado na Figura 1.2, o modelo de Ptolomeu apresenta os conceitos de epiciclo, deferente e equante:

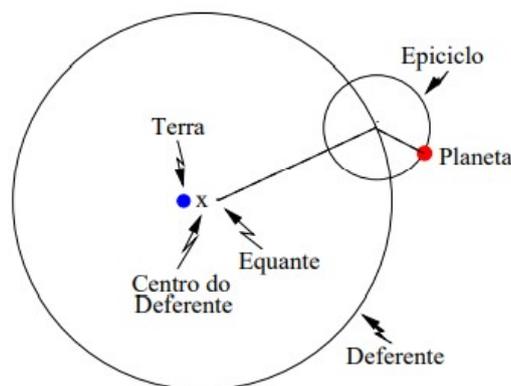


Figura 1.2: Representação do modelo de Ptolomeu destacando o ponto equante, o epiciclo e o deferente.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014

Nele, a ordem dos corpos celestes era: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Júpiter e Saturno. Mercúrio e Vênus, conhecidos como planetas internos, e Júpiter e Saturno denominados planetas externos. Para os planetas internos, o epiciclo era completado em 88 e 225 dias. O modelo de Ptolomeu ajustava o centro do epiciclo para que ele orbitasse a Terra no deferente em um ano exato, mantendo sempre alinhado entre a Terra e o Sol. Para os

planetas externos, cada um seguia seu epiciclo em torno de um ponto no deferente uma vez por ano, com esse ponto no deferente orbitando a Terra em um período maior: 1,88 ano para Marte, 11,9 anos para Júpiter e 29,5 anos para Saturno. Ptolomeu implementou outro ajuste, de forma que a linha que conecta o centro do epiciclo ao planeta fosse sempre paralela a linha entre a Terra e o Sol [5].

Contudo, apesar de aparentar estar em consonância com as observações, a teoria de Ptolomeu introduziu diversas complexidades além de seus predecessores. Os conceitos de epiciclo, equantes e excêntricos só adicionaram complexidade ao modelo, levando a críticas por parte dos seguidores de Aristóteles, que de acordo com Weinberg (2015) [5] consideravam que a teoria de Ptolomeu não correspondia à verdadeira natureza dos corpos celestes.

Enquanto o modelo de Aristóteles continuava sendo amplamente aceito por suas explicações filosóficas e teológicas sobre o cosmos, o modelo de Ptolomeu se destacava por oferecer uma base matemática rigorosa capaz de prever os movimentos planetários. Seus conceitos se mostraram funcionais para cálculos astronômicos, o que garantiu seu uso por um longo período. Seu modelo, juntamente com o de Aristóteles perduraram durante 1300 anos até serem contestadas por Copérnico, que apresentou uma abordagem revolucionária ao propor o modelo heliocêntrico [1].

## 1.4 O Sistema Heliocêntrico de Copérnico

Nicolau Copérnico, considerado o fundador da astronomia moderna, foi o primeiro a concluir que os planetas e o Sol não giravam ao redor da Terra. Entretanto a ideia de um Universo heliocêntrico já existia desde a época de Aristarco de Samos, um dos mais destacados astrônomos da antiguidade. Aristarco teve grande parte de sua obra perdida com a destruição da Biblioteca de Alexandria. Contudo, sua ideia heliocêntrica foi preservada de forma indireta por meio de um relato por Arquimedes, considerado um dos maiores físicos, matemáticos e inventores da antiguidade [6]. Em seu livro *Livro de Areia* ou *Arenário* afirma:

Aristarco de Samos publicou um livro que consistia em algumas hipóteses cujas premissas conduzem ao resultado de que o Universo é muitas vezes maior do que aquilo a que agora se dá esse nome. As suas hipóteses são que as estrelas fixas e o Sol se mantêm imóveis, que a Terra gira em torno do Sol na circunferência de um círculo, com o Sol situado no meio da órbita, e que a esfera das estrelas fixas, situada aproximadamente com o mesmo centro que o Sol, é tão grande que o círculo em que ele supõe que a Terra gira está para a distância das estrelas fixas na mesma proporção que o centro da esfera está para a superfície. (Evangelista [6], p. 94 apud *Arenário*)

No entanto, essa concepção foi somente tratada seriamente por Copérnico. Segundo Hawking (2002) [7], Copérnico utilizou instrumentos como quadrantes e astrolábios para observar os corpos celestes. Insatisfeito com o sistema de Aristóteles e Ptolomeu que havia dominado o ocidente por séculos, escreveu um ensaio denominado *Commentariolus* sobre os movimentos dos corpos celestes a partir de suas observações, na qual foi sua primeira tentativa de propor uma teoria em que a Terra não era o centro do Universo.

Entretanto, Copérnico desenvolveu suas ideias como um modelo para calcular as posições dos planetas, pois sabia que sua visão heliocêntrica seria controversa e poderia desafiar o entendimento dominante na época, preferindo manter suas teorias em silêncio por

um longo período, tendo como resultado *revolutionibus orbium coelestium* publicada em 1543 [2].

Em sua obra não havia um sistema heliocêntrico, mas heliostático, em que o Sol não era o centro do Universo, mas apenas próximo ao centro para explicar as variações na retrogradação e o movimento errante dos planetas [5]. Copérnico deduziu que quanto mais próximo do Sol estivesse um planeta, maior seria sua velocidade orbital. Assim, quando a Terra "ultrapassa" um planeta mais distante, que possui menor velocidade orbital, esse planeta parece apresentar movimento retrógrado, ou seja, "andar para trás" ilustrada na Figura 1.3.

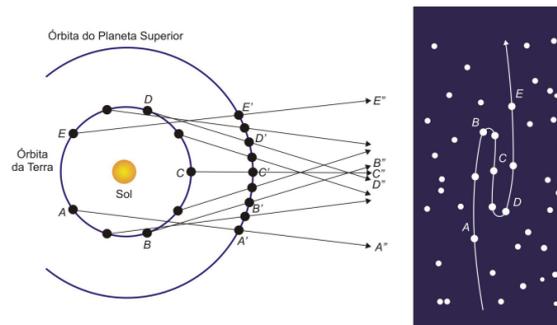


Figura 1.3: Ilustração do Movimento retrógrado de um planeta superior. Figura à esquerda ilustra as posições reais do planeta e da Terra nas órbitas; Figura à direita ilustra as posições aparentes do planeta superior em relação à Terra.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

Copérnico propôs que a Terra realizava uma rotação completa ao redor de seu próprio eixo e que completava uma órbita ao redor do Sol a cada ano. Ele foi o primeiro a estabelecer uma ordem heliocêntrica distinta do modelo Ptolomaico, determinando a ordem dos planetas conhecidos na época: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno [5]

Por outro lado, Ptolomeu, embora seu modelo fosse geocêntrico e complicado, também foi capaz de determinar com precisão as distâncias dos planetas conhecidos, alcançando resultados semelhantes aos de Copérnico [6].

Conforme ilustrado na Figura 1.4, o modelo heliocêntrico de Copérnico representa a organização dos planetas no sistema solar de acordo com suas observações.

No entanto Copérnico manteve a ideia de que as órbitas planetárias eram circulares. Para ajustar as observações astronômicas e obter previsões mais precisas, ele introduziu pequenos epiciclos, mas sem recorrer ao conceito de equantes, conforme afirmam Oliveira Filho e Saraiva (2014) [1].

Copérnico também realizou uma classificação dos planetas com base em suas proximidades ao Sol. Os planetas mais próximos do Sol, Mercúrio e Vênus, foram considerados "planetas inferiores", alcançando um máximo afastamento angular em relação ao Sol de  $28^\circ$  para Mercúrio e  $48^\circ$  para Vênus. Eles eram visíveis apenas ao amanhecer ou no anoitecer. Por outro lado, os planetas mais distantes do Sol, como Marte, Júpiter e Saturno, foram considerados "planetas superiores", com distâncias angulares que variavam entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  em relação ao Sol, podendo ser observados no meio da noite [5].

Embora não tenha abordado a gravidade diretamente, Copérnico refletiu sobre esse conceito:

"Havendo, pois vários centros, não será temerário duvidar se o centro do mundo

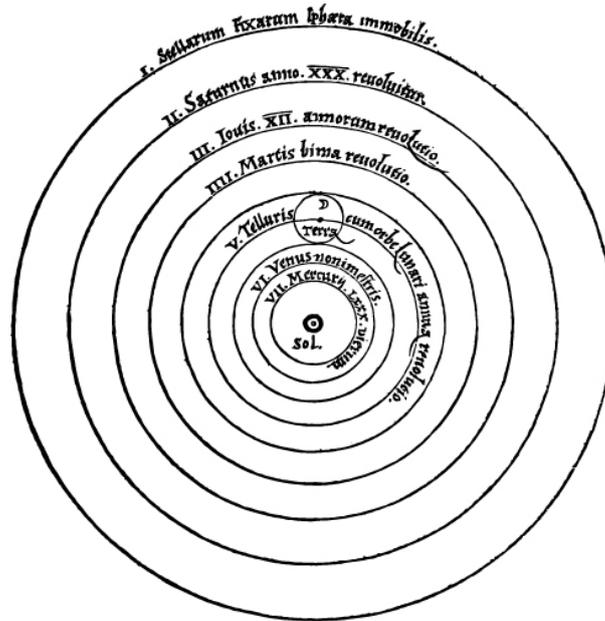


Figura 1.4: Representação do Modelo de Copérnico do Sistema Solar: representando a ordem dos planetas.

Fonte: Openstax [8].

será, de facto, o centro de gravidade terrestre ou qualquer outro [ponto]. Quanto a mim penso que a gravidade outra coisa não é senão um certo desejo natural introduzido nas partes pela divina providência do autor do Universo para que se encontrem na sua unidade e integridade, reunindo-se em forma de esfera. E é de crer que esta tendência exista também no Sol e na Lua, assim como nos outros planetas, para que por seu efeito eles possam conservar a forma esférica com que se apresentam." (Bento [9] p. 35, 2021 apud Copérnico, p. 45, 2014).

Copérnico estendeu a ideia de queda dos corpos para os corpos celestes que poderiam possuir suas próprias qualidades gravitacionais e que em cada um deles os objetos pesados tendiam para o seu centro [5]. Todos os corpos celestes tem gravidade e é por isso que possuem formato esférico. No entanto, Copérnico explicou a existência da "gravidade" de forma teológica, embora sua teoria estivesse próxima da ideia que mais tarde levaria à formulação da Gravitação Universal.

Porém o manuscrito, segundo Hawking (2002) [7], caiu nas mãos do teólogo luterano Andreas Osiander, que introduziu alterações sem o consentimento de Copérnico que diminuiu o impacto da obra, além de ser atacado por teólogos que defendiam o geocentrismo. O modelo de Copérnico enfrentava resistência por ir contra a Bíblia, especialmente passagens como a de Josué, em que ele pede a Deus que o Sol se detivesse no céu durante uma batalha. Essa passagem foi interpretada como evidência a favor da visão geocêntrica, sugerindo que o Sol se movia. Essa interpretação estava alinhada com a concepção tradicional da Igreja, que apoiava o modelo aristotélico, como resultado, o heliocentrismo de Copérnico não teve grande impacto na época.

## 1.5 As leis de Kepler

A ausência das esferas na teoria copernicana foi um fator determinante para a viabilização do sistema heliocêntrico, uma vez que a matemática de Copérnico era mais precisa e complicada que a de Ptolomeu na descrição dos céus [6]. Contudo, para que o movimento elíptico dos planetas fosse proposto, era necessário romper com as ideias platônicas, o que se consolidou com os trabalhos de Tycho Brahe e Johannes Kepler.

Tycho Brahe foi o último astrônomo observacional antes da invenção do telescópio. Destacou-se por suas meticulosas observações astronômicas, concentrando-se nas posições de planetas e estrelas. Tycho foi responsável por construir seu próprio observatório e embora tenha sido um grande contribuinte para a astronomia na época, ele rejeitava o modelo proposto por Copérnico, defendendo um modelo geocêntrico modificado [5] [1] [2].

Segundo Damasio (2011) [4], Kepler foi o primeiro a compreender a necessidade de abandonar o movimento circular uniforme que causava grande confusão entre os astrônomos da época. Na universidade de Tübingen, na Alemanha, o professor Michael Maestlin, apresentou os sistemas ptolomaico e copernicano em paralelo, e Kepler adotou rapidamente o copernicano.

Enquanto lecionava matemática em uma escola luterana em 1594, Kepler publicou sua primeira obra original, influenciada pelo neoplatonismo. Em seu trabalho sugeriu que as órbitas dos planetas eram círculos definidos por esferas transparentes que giravam em torno do Sol. Essas esferas eram cascas finas, cujos raios internos e externos correspondem às distâncias mínima e máxima dos planetas em relação ao Sol. De acordo com Weinberg [5], ele tentou relacionar os sólidos platônicos aos intervalos entre os planetas: para o intervalo de Mercúrio, um Octaedro; para Vênus, um Icosaedro; para a Terra, um Dodecaedro; Para Marte, um Tetraedro; para Júpiter, um Cubo; e por fim Saturno (Figura 1.5). Para Kepler, essa organização era coerente, uma vez que existiam cinco sólido platônicos e seis planetas conhecidos.

Em 1600, Kepler recebeu um convite de Tycho Brahe para integrar o seu observatório em Praga. Kepler esperava, ao aceitar o convite, utilizar as observações de Tycho para aperfeiçoar o seu modelo copernicano. Contudo, conforme apontado por Damasio (2011) [4], Kepler foi designado para estudar a órbita de Marte. Após a morte de Tycho, Kepler teve acesso aos dados que permitiram concluir esse trabalho, resultando na publicação de *Astronomia Nova* em 1609.

De acordo com Weinberg (2015) [5], Kepler eliminou muitas das divergências que afetavam as teorias desde Ptolomeu, melhorando a teoria de Copérnico. Ele introduziu o conceito de equante e excêntrico para a Terra, estabelecendo que um ponto, situado no outro lado do centro da órbita da Terra em relação ao Sol, em torno do qual a linha que ligava o planeta ao equante gira com velocidade constante, conforme a Figura 1.6

Posteriormente, Kepler em algum momento percebeu a necessidade de abandonar as ideias de Platão, Aristóteles, Ptolomeu, Copérnico e Tycho de que os planetas possuem órbitas circulares. Conforme Weinberg (2015) [5], no capítulo 58 de *Astronomia Nova*, Kepler concluiu que os planetas se movem em elipses, com o Sol em um dos focos, o que ficou conhecido como a Primeira Lei de Kepler. Ele também descobriu que a velocidade dos planetas varia de acordo com a distância em relação ao Sol, o que levou a formular a Segunda Lei de Kepler. Essa lei estabelece que a linha que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos iguais, portanto, quando o planeta está mais próximo do Sol, ele se move mais rapidamente [2].

Kepler demonstrou que o equante de Copérnico era, na verdade, um foco vazio da

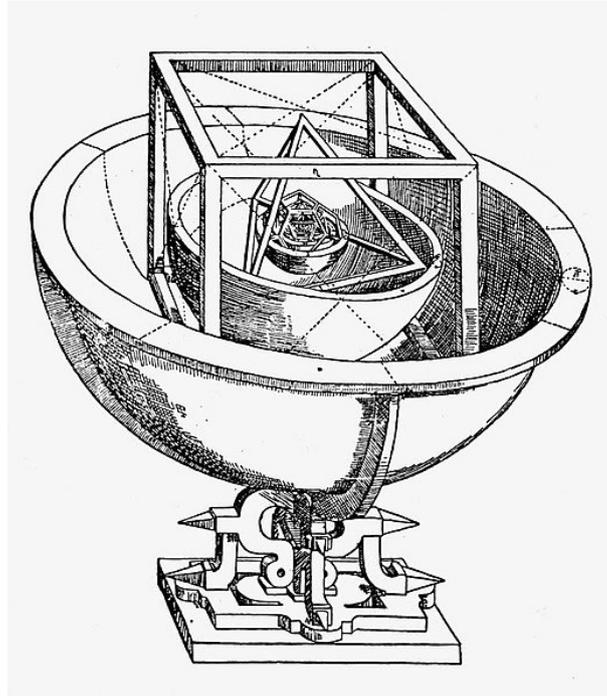


Figura 1.5: Ilustração do modelo da posição dos planetas no sistema de Kepler e os sólidos platônicos.

Fonte: Wikimedia Commons [10].

elipse. Segundo Weinberg (2015) [5] foram precisos dados observacionais de Marte obtidos por Tycho Brahe, que permitiram a Kepler concluir que os excêntricos e equantes não eram suficientes, e que as órbitas circulares precisavam ser substituídas por elípticas. Curiosamente Kepler propôs a segunda lei antes da primeira, conforme relata em *Astronomia Nova*.

Com as descobertas de Kepler, pela primeira vez na história da astronomia, a matemática se encaixava perfeitamente aos céus. Entretanto, a evidência apresentada não era totalmente conclusiva. Segundo Panek (2019) [2], as discussões focavam nas manchas da superfície lunar. Kepler afirmava que essas manchas eram montanhas, vales e planícies, mas o imperador Rodolfo, argumentou que as irregularidades observadas eram reflexos das imperfeições da Terra na superfície lunar.

O argumento do imperador Rodolfo é significativo, uma vez que o modelo aristotélico continuava a exercer forte influência sobre o pensamento astronômico da época. Sob essa perspectiva, o céu era concebido como uma região perfeita, composta pelo éter, uma substância imutável que sustentava o movimento dos corpos celestes. Dentro desse contexto, a ideia de que a Lua apresentava irregularidades era extremamente desconfortável, pois contrariava a visão tradicional de que os corpos celestes eram perfeitamente esféricos e isentos de falhas.

Portanto, a sugestão do imperador de que as manchas lunares poderiam ser reflexos de imperfeições da Terra revela a tentativa de alinhar as observações com as concepções aristotélicas vigentes. Essa abordagem indica a resistência ao rompimento com essas ideias tradicionais, evitando questionamentos sobre a natureza do cosmos. Assim, Rodolfo reflete o entrelaçamento entre as concepções filosóficas aristotélicas, buscando manter a estabilidade do modelo estabelecido, mesmo diante de novos dados e observações [5].

Em 1610, Kepler recebeu notícias que confirmavam parte de suas ideias. Galileu

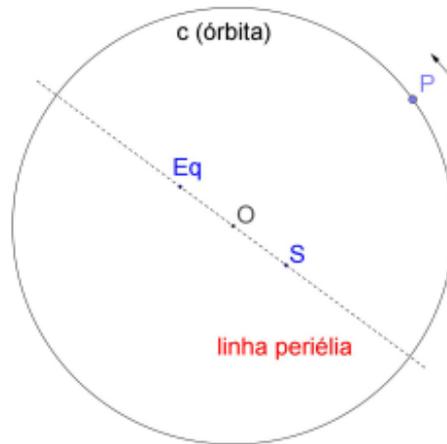


Figura 1.6: Representação do modelo de órbita de Kepler, em que considerou em torno do centro (O) da órbita planetária, deslocamentos do Sol (S) e do ponto equante (Eq) para a qual é constante na velocidade angular do planeta, sendo os deslocamentos determinados por uma linha.

Fonte: Garms; Caldas, 2017 [11]

Galilei havia observado os céus com um novo instrumento, trazendo várias descobertas para a astronomia, sendo a descoberta mais importante para Kepler: Galileu observara montanhas na Lua [2].

## 1.6 Galileu Galilei

A primeira evidência observada que contribuiu significativamente para o apoio ao heliocentrismo, em comparação ao sistema ptolomaico, foi apresentada por Galileu Galilei ao introduzir o uso do telescópio. Galileu, nascido em Pisa, na Itália, iniciou seus estudos na área da medicina. Contudo, seu interesse pela matemática e pela física o levou a desenvolver estudos inovadores que revolucionaram a compreensão dos fenômenos naturais [2] [5].

### 1.6.1 O Desenvolvimento do Telescópio e suas Descobertas

Segundo Weinberg (2015) [5], a partir de 1596, Galileu começou a complementar seu salário universitário fabricando e vendendo instrumentos matemáticos. Naquele período, recebeu dois exemplares de *Mysterium Cosmographicum* de Kepler, no qual ele escreveu que também era um copernicano, embora não tenha divulgado.

Em 1609, Galileu ouviu falar sobre um instrumento holandês, recém-inventado, a luneta. Conforme relata Weinberg (2015) [5] e Panek (2019) [2], ele rapidamente desenvolveu uma versão aprimorada do dispositivo, utilizando um tubo de chumbo equipado com uma lente côncava e outra convexa nas extremidades. Com essa configuração, Galileu alcançou uma ampliação de até oito ou nove vezes, significativamente superior às lunetas anteriores, que proporcionavam apenas três a quatro vezes de ampliação.

Em novembro de 1609, Galileu aperfeiçoou sua luneta e começou a utilizá-la para observações astronômicas, o que mais tarde seria conhecido como telescópio [12]. Ao

apontá-lo para os céus, Galileu iniciou uma série de descobertas revolucionárias, documentadas no panfleto *Sidereus Nuncius*, composto por cinquenta e duas páginas [2].

Galileu realizou seis descobertas de importância astronômica:

1. Segundo Weinberg (2015) [5], sua primeira descoberta ocorreu em novembro de 1609, quando direcionou seu telescópio para a Lua crescente. No lado iluminado, Galileu notou que a superfície lunar era irregular e cheia de depressões. No lado escuro da Lua, junto ao *terminator*- linha de transição entre a sombra e a luz - Galileu observou pontos luminosos e determinou que eram como picos de montanhas iluminados pelo Sol. De acordo com Weinberg (2015) [5], Galileu chegou a estimar que algumas dessas montanhas tinham 6400 metros de altitude.

Com essa descoberta, Galileu contestou as ideias de Tycho Brahe, que defendia que a luz provém da própria Lua ou das estrelas. Galileu argumentou que o brilho era resultado da reflexão da luz solar na Terra, assim como o brilho da Terra à noite é gerado pela luz solar refletida pela Lua. Essa observação reforçou que a Lua compartilhava características físicas com a Terra e não eram distintos dela [2] [5].

2. Outra descoberta importante ocorreu quando Galileu observou as estrelas, descobrindo que as seis estrelas visíveis de Plêiades eram acompanhadas por mais de quarenta outras estrelas. Na constelação de órião, identificou mais de quinhentas estrelas desconhecidas. Além disso, segundo Panek (2019) [2], Galileu revelou que a nebulosa de Praesepe não era um único objeto difuso, mas uma coleção de quarenta estrelas distintas. Ao observar a Via Láctea, concluiu que é uma vasta reunião de estrelas em aglomerados.
3. De acordo com Weinberg (2015) [5], Galileu também observou que os planetas pareciam como globos perfeitamente circulares semelhantes a pequenas luas, enquanto as estrelas, embora extremamente brilhantes, não exibiam um tamanho perceptível, sendo incapaz de distinguir a forma das estrelas mesmo com seu telescópio. Portanto, Galileu concluiu que elas deveriam estar muito longe da Terra, distante o suficiente para que suas imagens não pudessem ser visualizadas com clareza.
4. A descoberta mais importante de Galileu ocorreu em 7 de janeiro de 1610, quando apontou seu telescópio para Júpiter e identificou três pequenos pontos de luz ao seu redor [12]. Inicialmente, conforme descreve Weinberg (2015) [5], Galileu pensou tratar-se de três estrelas fixas. No entanto, na noite seguinte, as estrelas estavam a oeste de Júpiter, e em 10 de janeiro, apenas duas permaneciam visíveis, ambas a leste de Júpiter e em 13 de janeiro, ele observou quatro estrelas ao redor de Júpiter, concluindo que Júpiter era acompanhado por quatro satélites em sua órbita, conhecidos hoje como as quatro maiores luas de Júpiter, batizados de Ganimedes, Io, Calisto e Europa.

O conhecimento dos satélites de Júpiter foi de enorme relevância para o apoio ao modelo heliocêntrico de Copérnico. Galileu encontrou um exemplo em miniatura de um sistema solar: corpos celestes orbitando um centro que não era a Terra. O movimento dos satélites de Júpiter ao redor do planeta desafiava o modelo geocêntrico vigente [5]

Além de descobrir os satélites, Galileu se dedicou a medir os períodos de revolução de cada um deles. Contudo seus resultados não puderam ser incluídos em *Sidereus Nuncius* e foram publicados somente em 1612. Seus resultados mostram que Galileu

era cuidadoso com as suas observações demonstrando sua exatidão na coleta de dados.

- Em setembro de 1610, Galileu fez uma descoberta revolucionária ao observar Vênus com seu telescópio. Ele constatou que o planeta exibia fases semelhante às observadas na Lua [13]. Esse fenômeno era incompatível com a teoria de Ptolomeu, que não previa o aparecimento de fases planetárias, pois todos os movimentos planetários, em seu modelo, eram considerados em órbitas circulares ao redor da Terra e utilizava a ideia de deferentes e epiciclos, mas não incorporava as variações de iluminação que levariam a fases nos planetas. Deste modo, essa foi a primeira prova direta de que a teoria ptolomaica estava errada em relação ao modelo heliocêntrico. A comparação entre os dois modelos e a fase planetária é ilustrada na Figura 1.7

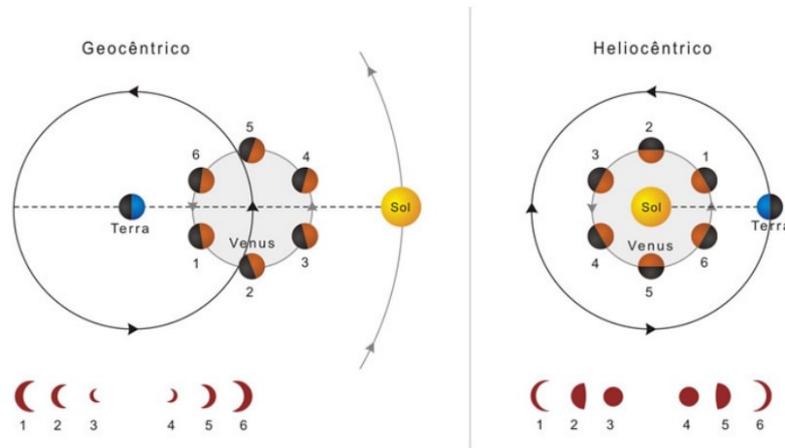


Figura 1.7: Imagem Ilustrativa das fases de Vênus em relação à Terra e ao Sol nos modelos geocêntrico e heliocêntrico e as formas como seria para um observador na Terra as fases de Vênus. O sistema heliocêntrico mostra as fases observadas no telescópio, enquanto o sistema geocêntrico seria visto sempre como crescente e minguante côncavo.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

- Pouco tempo depois, Galileu desenvolveu uma maneira de estudar a superfície solar, projetando a imagem do Sol em uma tela usando o telescópio. Dessa forma, ele realizou sua sexta descoberta, havia manchas escuras que se moviam sobre a superfície Solar. Seus resultados foram publicados em 1613, nas cartas sobre as manchas solares [5]

## 1.6.2 Galileu e a Condenação do Sistema Copernicano pela Igreja

Com o crescimento dos conflitos do copernicanismo, segundo Weinberg (2015) [5], Galileu escreveu em 1615 uma carta à Cristina de Lorena, Grã-Duquesa da Toscana, abordando a relação entre a ciência e a religião. Na carta, Galileu mencionou Lactâncio e sua rejeição a forma esférica da Terra como um exemplo grave do uso das escrituras para contradizer as descobertas científicas, e argumentou que a bíblia dificilmente teria a intenção de ser um texto de astronomia, pois mesmo diante dos cinco planetas conhecidos, faz referência apenas a Vênus. De acordo com Weinberg (2015) [5], a frase mais célebre de sua carta declara: “Eu diria aqui algo que foi ouvido de um eclesiástico do mais eminente

grau: ‘ Que a intenção do Espírito Santo é nos ensinar como ir ao céu, e não como o céu anda.’”.

Em 1615, Galileu decidiu protestar em Roma contra a proibição do copernicanismo. Segundo Weinberg (2015) [5], o Papa Paulo V, para evitar controvérsias, submeteu a teoria copernicana a uma comissão de teólogos, que declararam o sistema copernicano como “tolo” e “absurdo em filosofia”, pois contrariava a posição expressa das Sagradas Escrituras.

Em fevereiro de 1616, Galileu foi convocado perante a inquisição e recebeu ordens confidenciais. Como relata Weinberg (2015) [5], eram dois documentos, um assinado que ordenava não defender o copernicanismo e outro sem assinatura ordenando-lhe que não sustentasse, nem defendesse e nem ensinasse o heliocentrismo sob forma nenhuma. Em março de 1616, a inquisição emitiu um decreto formal a público, sem mencionar Galileu, e o *de Revolutionibus* foi colocado no index dos livros proibidos. *De revolutionibus* se manteve no index até 1835, prejudicando o ensino da ciência em alguns países como a Espanha.

Em 1623, segundo Panek (2019) [2], Galileu publicou *O Ensaiador*, em que argumentou a ideia “O Universo está escrito na linguagem matemática”. Nessa publicação, Galileu desafiava o método filosófico predominante da época, o que intensificou seus conflitos com os jesuítas. Naquele período, a igreja ainda tolerava o sistema de Copérnico como uma ferramenta para calcular os movimentos aparentes dos planetas, mas não como uma teoria verdadeira.

### 1.6.3 Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo

Galileu teve esperanças de que as coisas melhorariam a partir de 1624, quando Maffeo Barberini ocupou o papado como Urbano VIII. Barberini acolheu Galileu em Roma e durante as conversas, Galileu explicou sua teoria das marés, na qual vinha trabalhando desde antes de 1616 [2] [5].

A teoria baseava-se no movimento da Terra. Galileu propôs que as águas dos oceanos avançavam e recuavam conforme a rotação da Terra ao redor do Sol. Esse movimento, segundo Galileu, fazia com que a velocidade de um ponto da superfície terrestre aumentasse e diminuísse continuamente. Esse padrão criaria uma oscilação periódica nos oceanos com períodos de meio dia, um terço do dia e assim sucessivamente.

Apesar dessa explicação, ainda não havia influência da Lua nas marés. Para explicar essa influência lunar, supôs que a velocidade orbital da Terra aumentava na Lua Nova, quando a Lua se posicionava entre a Terra e o Sol, e diminuía na Lua cheia, quando a Lua estava do lado oposto em relação ao Sol [12] [5].

Segundo Weinberg (2015) [5], o Papa permitiu que Galileu publicasse a sua teoria das marés se tratasse como hipótese matemática. Com a devida autorização do bispo local, Galileu publicou, em 1632, a obra *Diálogo* (Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo).

Na época, havia quatro sistemas principais para a compreensão do Universo: o aristotélico, tychoniano, ptolomaico e copernicano. No entanto, Galileu desconsiderou os sistemas de Aristóteles e Tycho Brahe. Conforme Weinberg (2015) [5], o sistema aristotélico não correspondia com a observação, enquanto o sistema tychoniano funcionava muito bem. Ainda assim, é possível que Galileu acreditasse que sua teoria mostrava que a Terra se movia mesmo sem apoio de cálculos precisos.

A obra *Diálogo* é composta por uma conversa entre três personagens: Salviati, repre-

sentando Galileu, levando o nome de seu amigo, Florentino Filopono Salviati; Simplicio, representando um aristotélico, inspirado por Simplicius. Por fim, Sagredo, que assume o papel de sábio juiz entre os dois. A obra é organizada em uma série de diálogos, distribuídos ao longo de diferentes dias. No quarto dia de *diálogo*, Galileu apresenta sua teoria das marés que vai contra às ordens estabelecidas pela Inquisição [2] [5].

Com a publicação de sua obra, a ordem da inquisição de 1616, foi mostrada para o Papa Urbano, que suspeitou que o personagem Simplicio servisse como uma sátira de sua própria postura. Consequentemente, a inquisição proibiu a venda do diálogo; no entanto, a ação foi tardia, pois o livro já estava esgotado. Em 1633, Galileu foi julgado e condenado à prisão perpétua por “suspeita veemente de heresia” e foi obrigado a abjurar sua posição de que a terra gira em torno do Sol [5].

Galileu faleceu em 1642, enquanto cumpria prisão domiciliar em Arcetri. Somente no século XX ele foi reabilitado pela Igreja, quando uma comissão, ao revisar o caso, concluiu que a condenação imposta havia sido um equívoco da Igreja [5].

#### 1.6.4 O Estudo dos Movimentos e o Método Experimental

As realizações astronômicas até a época de Galileu baseiam-se apenas na observação passiva dos fenômenos celestes. Somente séculos depois surgiram instrumentos mais avançados, como o telescópio, que permitiram obter dados mais precisos. Contudo, para abordar questões complexas apenas a observação não é o suficiente, sendo necessário o método experimental.

Esse estudo teve início com Galileu Galilei. Conforme descrito por Weinberg (2015) [5] e Panek (2019) [2] além da teoria das marés, os estudos de Galileu sobre o movimento foram apresentados em sua obra *Discurso sobre as Duas Novas Ciências*, finalizado em 1635, durante seu período de prisão domiciliar, e publicado em 1638 na cidade universitária de Leiden.

O elenco de personagens era o mesmo utilizado anteriormente. No primeiro dia, Galileu baseou seu argumento nas afirmações de Aristóteles, que sustentava que a velocidade de queda de um objeto depende da sua massa. Galileu, no entanto, questionou essa ideia. Ele argumentou que, ao dividir um objeto pesado em duas partes e, em seguida, amarrá-las novamente, segundo Aristóteles, as partes deveriam cair mais lentamente que o objeto original. Galileu, então, propôs que, em condições ideais (na ausência da resistência do ar, o vácuo), corpos leves e pesados caem à mesma velocidade [2] [12] [5].

Para estudar essa afirmação, no terceiro dia Galileu apresenta a sua contribuição mais importante para o movimento. Como os objetos caem em uma velocidade superior à que o olho humano consegue observar, Galileu desacelerou o movimento para uma forma observável. Como relata Panek (2019) [2], ele construiu rampas de madeira finamente polidas pelas quais ele podia rolar esferas.

Galileu variou as massas das esferas e o ângulo da rampa, observando que, independente do peso, as esferas chegavam ao final da rampa ao mesmo tempo, sustentando a sua afirmação. Contudo, além de confirmar sua teoria, Galileu obteve mais informações sobre os objetos em queda.

Ele percebeu que ao soltar uma esfera em uma rampa, ela ganhava velocidade durante sua descida, independente do ângulo, acelerando de forma constante. Segundo Panek (2019) [2], após um segundo, a esfera percorria uma unidade de distância; após dois segundos, percorria quatro vezes essa unidade, e assim por diante. Se essa relação se mantém quando a inclinação não é tão suave, então ela se manteria quando fosse vertical.

Então Galileu poderia estar confiante que ela ainda estaria ganhando velocidade na mesma proporção e definiu que a distância seria proporcional ao tempo ao quadrado.

Após estudar sobre a queda vertical, decidiu diminuir a inclinação até que fosse um plano horizontal. Galileu iria estudar sobre objetos rolando. Agora uma esfera num plano horizontal não estaria mais ganhando velocidade, ela estaria rolando a uma velocidade constante ou estaria se estivesse em um plano perfeitamente liso e a esfera perfeitamente redonda. Mas isso deu oportunidade para Galileu repensar as ideias dos antigos.

Na antiguidade se perguntavam o que mantinha a matéria em movimento. Como determinou Aristóteles, ao soltar uma pedra, ela irá cair para o centro do Universo. Mas se impulsionar, ela não irá cair diretamente para o centro do Universo, seu movimento não iria ser retilíneo, portanto, ela ainda deve estar em contato com algo que a está movendo. Aristóteles sugeriu que fosse o ar, mantendo contato com o projétil e o mantendo em movimento.

Portanto, no quarto dia Galileu introduziu os projéteis. Suas ideias foram baseadas em um experimento que realizou em 1608, no qual uma esfera era liberada de um plano inclinado a partir de várias alturas iniciais. Ao observar a distância percorrida e o trajeto da esfera até chegar ao solo, Galileu concluiu que a trajetória descrita era uma parábola. Embora não tenha documentado o experimento em detalhes, conforme aponta Weinberg (2015) [5], ele argumentou em favor da parábola utilizando a definição de Apolônio, que descreve uma parábola como o conjunto de todos os pontos em um plano que possui a mesma distância de um ponto fixo, chamado foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz. Essa definição caracteriza a parábola como uma curva simétrica.

Galileu também introduziu um princípio crucial: em um experimento, se uma pessoa estiver dentro de uma cabine fechada em um navio em movimento constante e lançar uma pedra para cima, a pedra retornará à sua mão. Esse fenômeno ocorre porque tanto a pessoa quanto a pedra estão se movendo à mesma velocidade do navio. Segundo Panek (2019) [2], esse princípio representa um marco para a formulação da Inércia.

As descobertas de Galileu e seus experimentos pavimentaram o caminho para os avanços posteriores da física, especialmente para Isaac Newton, que formalizaria esses princípios, como a Inércia, em suas famosas leis do movimento.

## 1.7 Isaac Newton e a Unificação dos Movimentos Celestes e Terrestres

### 1.7.1 Vida de Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em 25 de dezembro de 1642, na propriedade rural da sua família, Woolsthorpe, localizada em Lincolnshire, Inglaterra [2]. Aos dezenove anos, foi aceito no Trinity College, em Cambridge, como *sizar*<sup>1</sup>. Assim como Galileu, Newton iniciou sua formação a partir dos ensinamentos de Aristóteles, uma vez que o currículo da Universidade de Cambridge mantinha o mesmo foco aristotélico predominante há quatro séculos [14] [5].

Contudo, Newton decidiu ampliar sua formação ao estudar obras mais recentes, como as de Galileu e Kepler, além de adquirir obras de pensadores como Quaestiones, de Descartes e Elementos de Euclides, o que despertou seu interesse pela matemática [5]. Em 1664, concluiu o bacharelado na Universidade de Cambridge.

---

<sup>1</sup>sizars eram estudantes que, em troca de isenção de custos, realizavam tarefas como servir as refeições ou ajudar os mais velhos.

No ano seguinte, a peste bubônica atingiu a Inglaterra, levando ao fechamento temporário da universidade. Durante esse período, Newton retornou a Woolsthorpe, onde permaneceu isolado entre os anos de 1665 e 1666 devido à peste. Esse intervalo, posteriormente denominado *anni mirabiles* (anos admiráveis) de Newton, foi marcado por uma intensa dedicação à resolução de problemas, resultando nos primeiros esboços de suas contribuições fundamentais para a ciência [6].

### 1.7.2 As Contribuições de Newton

Além dos seus trabalhos relacionados aos movimentos e a Lei da Gravitação Universal, Newton contribuiu na área da óptica e da matemática.

#### Óptica

Durante o período de isolamento pela peste negra, Newton se concentrou nas suas investigações, inclusive na óptica. Desde a antiguidade, observavam-se surgir cores quando a luz atravessava um vidro curvo, mas consideravam que o vidro produzia essas cores. Newton, concluiu que a luz branca é uma combinação de todas as cores e que o ângulo de refração no vidro ou na água depende da cor [5]. A luz vermelha, por exemplo, sofre uma refração menos acentuada que a luz azul, o que resulta na separação das cores ao passar por um prisma ou uma gota de chuva.

Para testar a sua hipótese sobre a natureza da luz, Newton utilizou um engenhoso arranjo de prismas. Ele combinou todas as cores produzidas pela refração da luz branca e descobriu que ao se combinarem, resultam novamente na luz branca [12]. Essa descoberta revelou que o ângulo de refração depende da cor da luz, implicando que as lentes de vidro dos telescópios, como os utilizados por Galileu, focalizavam as diferentes cores de maneira distinta, causando o borramento de imagens de objetos distantes.

Segundo Weinberg (2015) [5], para evitar essa dispersão, Newton inventou um telescópio em que a luz é focalizada por um espelho curvo e não por uma lente de vidro. Portanto, com um telescópio conhecido como refletor, com apenas quinze centímetros de comprimento, conseguiu obter uma ampliação de quarenta vezes. Newton descreveu seu instrumento e suas descobertas em uma carta, e posteriormente, publicou seu trabalho na área da óptica em 1704.

No entanto, a teoria das cores de Newton gerou controvérsias, especialmente com Robert Hooke, um cientista renomado por suas contribuições à ciência, incluindo a invenção do microscópio e a formulação da lei da elasticidade. Hooke criticou as ideias de Newton, iniciando um período de disputa entre ambos [12]. Segundo Evangelista (2011) [6], essa fase representou um período de desgaste significativo para Newton, levando-o a evitar confrontos públicos e adiar a publicação de suas descobertas na óptica, que só foram publicadas após a morte de Hooke.

#### O Cálculo Diferencial e Integral

Além de suas contribuições à física, Newton destacou-se também na matemática. Em 1665, ele começou a elaborar soluções para diversos problemas matemáticos, inclusive em infinitesimais. Ele se beneficiou de estudos anteriores na área, como os de Wallis e Barrows. Para aprofundar suas ideias, Newton refletiu sobre como descobrir a velocidade num instante, sabendo a distância percorrida no intervalo de tempo [14] [5].

Ele raciocinou que no movimento não uniforme, a velocidade num instante é a razão entre a distância percorrida e o tempo transcorrido num intervalo de tempo infinitesimal naquele instante. Introduziu o símbolo  $o$  para um intervalo de tempo infinitesimal e definiu que a velocidade no tempo  $t$  como a razão de  $o$  da distância viajada entre o tempo  $t$  e o tempo  $t+o$ . Newton deu o nome de fluxo de  $D(t)$ , conceito conhecido como derivada.

Posteriormente, Newton abordou o problema de determinar áreas delimitadas por curvas. Este desafio o levou a formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece que para encontrar a área sob uma curva, é necessário identificar uma quantidade cujo o fluxo seja precisamente a função que descreve a curva [5]. Este feito ficou conhecido como Integração.

Newton inventou o cálculo diferencial e integral, mas passou-se muito tempo até que o trabalho fosse amplamente conhecido. Foi somente após uma controversa disputa com Leibniz sobre a prioridade da descoberta do cálculo que Newton se sentiu obrigado a apresentar suas descobertas ao público.

### 1.7.3 A História da Maçã e a Formulação da Lei da Gravitação Universal

No entanto, foram as teorias do movimento e da gravidade de Newton que tiveram maior importância. A história da maçã caindo de uma árvore, frequentemente associada ao momento em que Isaac Newton teria concebido a ideia da Gravitação Universal, é uma das narrativas mais conhecidas na história da ciência. Supostamente ocorrida no verão de 1666, essa anedota teria sido criada pelo próprio Newton para reforçar sua alegação de que a descoberta da gravitação ocorreu aproximadamente vinte anos antes da publicação do *Principia* [15].

De acordo com William Stukeley, amigo de Newton, essa narrativa foi registrada no manuscrito “Memórias da Vida de Sir Isaac Newton”. Em suas palavras, Newton explicou que a ideia da gravitação surgiu enquanto observava a queda de uma maçã:

[...] Depois do almoço, como o tempo estava quente, fomos para o jardim e tomamos chá sob a sombra de algumas macieiras, somente ele e eu. Entre outras coisas, disse-me que ele estava exatamente na mesma situação em que, muito tempo atrás, a ideia da gravitação veio à sua mente. “Por que uma maçã deve sempre descer verticalmente ao solo?” pensou ele consigo mesmo, por ocasião da queda de uma maçã, enquanto estava sentado em uma atitude contemplativa.” ( Mckie; Beer [16], p. 52-3 apud Stukeley, Royal Society Ms. 142)

Contudo, como destaca Cohen (2002) [17], a ideia de que Newton teria desenvolvido a teoria da gravitação por completo em 1666 é equivocada. Ele ainda não possuía ferramentas conceituais e matemáticas que seriam fundamentais para a formulação da Lei da Gravitação Universal. Essa “estória”, portanto, pode ter sido elaborada para destacar sua genialidade, enquanto o desenvolvimento da teoria se deu, na verdade, ao longo de décadas [17].

Essa análise revela que o trabalho de Newton foi fruto de observação, experimentação e compreensão gradual dos fenômenos naturais. Apesar da estória da maçã ser possivelmente fictícia, ilustra como Newton buscou compreender e formalizar a conexão entre os fenômenos terrestres e celestes.

Newton escreveu com suas palavras como começou a estudar a gravidade:

Foi em 1666 que comecei a pensar na gravidade se estendendo até a órbita da Lua & (tendo descoberto como estimar a força com a qual [um] globo girando dentro de uma esfera pressiona a superfície da esfera) deduzi da regra de Kepler, de que os tempos periódicos dos planetas estão em proporção sesquialterada de suas distâncias do centro de suas órbitas devem [ser] reciprocamente os quadrados de suas distâncias dos centros em torno dos quais giram & portanto comparei a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra & descobri que correspondem bastante bem. Tudo isso [inclusive seu trabalho sobre o cálculo e as séries infinitas] foi durante os dois anos da peste de 1665-6. Pois naqueles dias eu estava no auge da minha idade para a invenção e pensava em matemática e filosofia mais que em qualquer outra época desde então. (Weinberg [5], p. 234 apud Westfall, 1995, p. 47)

De acordo com Panek [2] e Weinberg [5], quando estudante do Trinity College, Isaac Newton manteve um caderno intitulado *Quaestiones Quaedam Philosophicae (Certas questões filosóficas)*, no qual investigava até que ponto os elementos da natureza poderiam interagir entre si sem a intervenção de um poder divino. Nesse contexto, Newton empregava em seu caderno, conceitos como “gravidade” e “levidade” da mesma maneira que os filósofos antigos, associando-os aos movimentos “para cima” e “para baixo”. No entanto, sua maior preocupação residia em compreender a interação entre as matérias, que influenciava um movimento das outras.

Uma das questões formuladas por Newton, era se a mesma causa que explicava os movimentos dos corpos na Terra poderia ser aplicada à Lua. Conforme mencionado por Panek (2019) [2], essa ideia já havia sido apresentada por João Filopono, filósofo que defendia a uniformidade entre a matéria terrestre e celeste. Newton inspirado pelas ideias de René Descartes, filósofo e físico francês, sugeriu a hipótese de uma presença invisível capaz de conectar o motor e o movido<sup>2</sup>, de acordo com a suposição de que os vórtices seriam movimentos circulares da substância invisível que permeia o Universo. Nessa visão, a matéria não estava em repouso, mas se movia constantemente, formando vórtices que influenciavam os movimentos dos corpos celestes [12]. Essa ideia explicava os movimentos dos corpos sem recorrer à gravidade. Sob essa perspectiva, Newton voltou sua atenção para os fenômenos celestes e passou a investigar se a matemática de Kepler poderia de fato descrever os movimentos dos corpos no céu [5].

Kepler sabia que as órbitas dos planetas não eram circulares, mas elípticas, e supôs que as órbitas de todos os planetas seguiam esse formato. Panek (2019) [2] ressalta que Newton estava disposto a aceitar a ideia de que as órbitas planetárias eram elípticas, mas reconhecia que faltava a matemática para explicar essa observação, tendo em vista que, uma órbita é um movimento contínuo, único e suave, que exigiria uma abordagem geométrica mais sofisticada.

Os matemáticos não podiam simplesmente determinar o ângulo em relação ao Sol em um ponto da órbita e, em seguida, outro, comparando os ângulos de maneira discreta. Eles precisavam de uma ferramenta que permitisse medir a matéria em movimento contínuo. Ao contrário de Kepler e Galileu, Newton possuía o domínio de uma linguagem matemática que ele mesmo desenvolveu, o cálculo infinitesimal [5].

O cálculo permitiu que Newton dividisse uma órbita em quantos incrementos pequenos fossem necessários. Por conseguinte, ele demonstrou que uma órbita elíptica não era

---

<sup>2</sup>Os conceitos de motor e movido estão relacionados à teoria do movimento de Aristóteles. O motor é aquilo que causa ou produz movimento, sendo o agente responsável por iniciá-lo ou sustentá-lo no Universo. O movido, por sua vez, é aquele que recebe ou sofre o movimento.

apenas consistente com o modelo do inverso ao quadrado da distância, mas que dependia fundamentalmente desse modelo [2] [12] [5]. Após chegar nessa conclusão, Newton deixou sua ideia em segundo plano temporariamente.

## A Visita de Edmond Halley e o Desenvolvimento do Principia

Enquanto Newton ainda se dedicava à elaboração de suas ideias, conforme Weinberg (2015) [5] e Panek (2019) [2], Robert Hooke entrou em contato com Newton, compartilhando suas próprias teorias, especialmente sobre a lei do inverso do quadrado. Em resposta, Newton afirmou que desconhecia o trabalho de Hooke, mas destacou que o cálculo era essencial para compreender os movimentos planetários.

No verão de 1684, enquanto lecionava em Cambridge, Isaac Newton recebeu uma visita de Edmond Halley, astrônomo e matemático de renome. Halley trouxe consigo uma questão que havia gerado inquietação entre alguns de seus colegas, como Hooke, sobre a conexão entre a lei do inverso do quadrado e a terceira Lei de Kepler para órbitas circulares. Halley perguntou qual seria a forma geométrica que descreve a órbita de um planeta se movendo sob influência de uma força que diminui ao inverso do quadrado da distância. “Elíptica”, Newton respondeu afirmando que já havia realizado os cálculos necessários e continuaria suas investigações e enviaria uma demonstração, conforme solicitado por Halley [14] [5]

## O Estudo dos Movimentos

Ao retomar seus cálculos, Newton desviou sua atenção da geometria das órbitas para aprofundar-se no movimento. Inspirado pela curiosidade de Galileu, ele começou a questionar o próprio significado de estar em movimento, trabalho que viria a se tornar conhecido como *De motu corporum in gyrum* (Sobre o movimento dos corpos girantes) [14].

Nesse trabalho, Newton não buscava apenas identificar a causa responsável pelo movimento, como se preocupavam os filósofos que antecederam. Ele foi além, questionando o próprio conceito de movimento e formalizando um princípio já esboçado anteriormente por Galileu: “A matéria em repouso permanecerá em repouso a menos que seja movida. A matéria em movimento permanecerá em movimento, a menos que seja parada” [2].

Sob a perspectiva de Copérnico e Galileu, que reconheciam a Terra como um planeta em movimento, Newton expandiu essa ideia ao propor que os demais planetas também deveriam ser considerados como matéria em movimento, conforme destaca Panek (2019) [2]. Assim, a Terra, como um projétil, continuaria se deslocando indefinidamente a menos que fosse detida por um obstáculo.

Entretanto, a ideia de que os planetas fossem projéteis não era inédita de Newton. Filopono já havia sugerido que os corpos celestes não diferiam dos corpos terrestres, propondo que o movimento dos céus fosse sustentado por uma transferência de força no momento da criação, que os mantinha em movimento até aquele presente [2].

Newton, no entanto, precisava incorporar o princípio de que a matéria em movimento continua em movimento até ser interrompida. Isso o levou a refletir sobre o fato de que, se os objetos deveriam estar deixando a superfície da terra em rotação, isso indicaria que a Terra em movimento também agiria como um projétil e deveria estar sendo lançado para fora.

Contudo, os princípios de movimento de Galileu envolviam somente a matéria no mundo terrestre. Newton ampliou suas ideias, sugerindo que esses mesmos princípios deveriam se aplicar à matéria no céu. Nesse contexto, ele passou a examinar a Terra e

a Lua como uma única unidade em movimento. Newton percebeu que, como qualquer objeto na superfície da Terra, a Lua deveria seguir uma trajetória retilínea. No entanto, ela não faz. Ele propôs que, como a matéria na superfície da Terra, a Lua experimentava um movimento adicional: o movimento para baixo. A combinação desses movimentos explicaria a órbita elíptica da Lua em torno da Terra [2] [5].

Newton imaginou que a aceleração da Lua em direção à Terra obedecesse à mesma relação do inverso ao quadrado da distância. Para validar essa hipótese, utilizou as medições de aceleração de Galileu na superfície da Terra, aplicou a lei do inverso do quadrado a distância da Lua e incluiu sua velocidade orbital [2]. A matemática comprovou a validade da ideia. Em seguida, Newton estendeu esse princípio aplicando-o à relação entre os planetas e seus satélites. Se a relação se aplicava à Lua e à Terra, deveria se aplicar às luas de Júpiter e Saturno, por conseguinte, aos planetas em relação ao Sol.

Com esse avanço, Newton estava preparado para uma importante conclusão em *De motu*: "Portanto, os grandes planetas giram em elipses com um foco no centro do Sol." [2]. No entanto, uma nova percepção surgiu: Newton havia tratado os planetas e o Sol como pontos no espaço, mas, na realidade, eles são corpos compostos por matéria. Essa matéria exerce uma influência "para baixo" sobre outros corpos. Assim, enquanto a lua "cai" em direção a Terra, esta também "cai" em direção à Lua. Da mesma forma, a Terra está caindo em direção ao Sol, e o Sol também está caindo em direção a Terra. De acordo com essa compreensão, Newton percebeu que todos os corpos celestes estão simultaneamente viajando em linhas retilíneas e "caindo" uns em direção aos outros [5].

Essa percepção levou Newton a abandonar *De motu* e iniciar um novo trabalho. Esse trabalho conteria o que ele já havia escrito para *De motu*, mas agora com a complicação adicional de que a interação gravitacional entre corpos celestes gerava irregularidades em suas órbitas, tornando-as imperfeitas. Reconheceu, portanto, que os planetas não orbitam exatamente em elipses e que suas trajetórias variavam a cada ciclo orbital, influenciadas pelos movimentos combinados de todos os corpos celestes e pelas interações entre eles [14].

Assim, Newton ampliou os princípios de Galileu, inicialmente aplicados a esferas rolando, para compreender o comportamento dos corpos celestes. Ele concluiu que tudo no Universo está em constante queda em direção a outros corpos e elaborou dois testes para verificar suas teorias: um na Terra e outro no Céu.

Na Terra, Newton aplicou sua matemática às marés, tratou a Terra como uma esfera composta por água e reconheceu que as marés como tudo em um planeta estão sob influência de todos os corpos no Universo. Segundo Panek [2], ele consultou volumosas coleções de dados sobre as marés, combinou essas informações com as posições da Lua e do Sol nos momentos específicos e aplicou suas equações. O resultado confirmou suas previsões: a influência gravitacional da Lua nas marés era ligeiramente superior ao dobro da exercida pelo Sol, exatamente como previu.

No Céu, Newton testou sua teoria com os cometas. Embora Tycho Brahe e Kepler já tivessem demonstrado que os cometas emergiam de uma região além da órbita lunar, Halley percebeu um padrão que sugeria que esses cometas poderiam retornar [2] [14]. Caso isso fosse verdade, os cometas deveriam orbitar o Sol e seguir um caminho elíptico. Newton coletou os mesmos dados observacionais dos cometas, aplicou os cálculos e novamente a matemática corroborou sua teoria [12].

Newton apresentou um manuscrito de nove páginas, contendo suas descobertas, no qual mostrava como tratar o movimento geral dos corpos sob influência de uma força dirigida para um corpo central [14]. Esse trabalho culminaria no célebre *Principia Mathematica*, finalizado em 1685. Atendendo ao apelo de Edmond Halley, Newton apresentou

a sua obra a Royal Society em 1686, onde foi bem recebida pela comunidade científica.

Apesar do sucesso, o *Principia* quase teve sua seção final, dedicada à teoria da gravitação suprimida. Isso porque Robert Hooke reivindicava crédito pela relação entre a gravitação e o inverso do quadrado da distância, que ele afirmava ter descoberto antes de Newton e comunicado por correspondência [5]. Contudo, Newton jamais reconheceu ou mencionou a contribuição de Hooke.

Halley desempenhou um papel crucial na publicação do *Principia*, financiando o projeto e revisando anonimamente o livro nas *Philosophical Transactions*, periódico que simbolizava a nova abordagem da investigação científica. Na revisão, Halley exaltou a profundidade da mente de Newton e a elegância de suas soluções matemáticas:

Este autor incomparável, tendo finalmente sido convencido a aparecer em público, deu neste tratado um exemplo notável do alcance dos poderes da mente; e ao mesmo tempo, mostrou quais são os princípios da filosofia natural, e tão bem derivou deles suas conseqüências, que parece ter esgotado seu argumento, deixando pouco a ser feito por aqueles que o sucederão. Sua grande habilidade na geometria antiga e nova, ajudada por suas próprias melhorias na última (quero dizer, seu método de séries infinitas), o capacitou a resolver problemas que, pela sua dificuldade, ainda estariam sem solução, se alguém menos qualificado que ele os tivesse tentado (Panek [2], p. 67).

## O Conceito de Gravitação

Embora tenha revolucionado o estudo do cosmos, Newton não ofereceu explicações para a causa da gravitação. Ele reconhecia a existência do fenômeno, mas declarava não pretender investigar sua origem. Em uma carta a Richard Bentley, escreveu: “A causa da gravidade é algo que não pretendo investigar.” [2]. Essa abordagem marcava uma transição fundamental na ciência: priorizar a descrição precisa dos fenômenos e a formulação de leis universais, em vez de especulações metafísicas.

O termo “Gravitação”, adotado por Newton, não era uma criação original, variações já circulavam há séculos, mas sua interpretação trouxe uma perspectiva inédita. A gravidade deixou de ser vista apenas como sinônimo de peso ou ato de cair e passou a ser um princípio universal que vinculava o comportamento dos corpos celestes e terrestres.

### 1.7.4 A Nova filosofia

O impacto do *Principia* foi consolidado pelo prefácio da segunda edição, escrito por Roger Cotes, renomado matemático britânico e colaborador próximo de Newton. Este destacou como Newton transcendeu as limitações das tradições filosóficas anteriores. Ele descreveu três etapas na evolução do pensamento científico [2]

A primeira etapa, herdada dos antigos, fundamentava-se em uma visão animista da natureza, na qual os fenômenos eram justificados por qualidades intrínsecas e vagas, sem necessidade de explicações detalhadas. Esse modelo limitava-se a descrições subjetivas e abstratas.

Na segunda etapa, surgiu uma abordagem mecanicista, que buscava explicar os fenômenos naturais por meio de partículas com formas e tamanhos variados, influenciadas por fluidos misteriosos. Embora mais concreta, essa perspectiva carece de comprovações empíricas sólidas, sendo frequentemente considerada uma construção fictícia e especulativa.

A terceira etapa, representada pela chamada Nova Filosofia, marcou uma ruptura definitiva. Sob a liderança de Newton, a Ciência passou a descrever os fenômenos naturais com rigor matemático, oferecendo explicações confiáveis e replicáveis. Nesse contexto, a gravitação newtoniana tornou-se o exemplo mais proeminente dessa nova abordagem, consolidando-se como um marco do pensamento científico moderno.

Newton, portanto, personificou o ápice dessa transformação, ao propor leis universais que não apenas explicavam o movimento dos corpos, mas também estabeleciam um padrão metodológico e revolucionário. Sua combinação de observação empírica, experimentação e modelagem matemática elevou a compreensão humana do cosmos.

A nova filosofia trouxe uma inovação fundamental: a capacidade de prever movimentos futuros com base em leis matemáticas derivadas de observações anteriores.

Um exemplo dessa abordagem foi a análise das observações do astrônomo francês Jean Richer, realizadas em 1672. Richer descobriu que os pêndulos que funcionam com precisão em Paris apresentavam discrepâncias ao serem utilizados no Equador. Ele ajustou os comprimentos dos pêndulos para corrigir as diferenças, mas a explicação para o fenômeno permaneceu desconhecida até Newton utilizar os dados em sua formulação da gravitação [2] [12].

Newton propôs que a Terra, sendo uma esfera rotativa, composta principalmente de água em sua superfície, deveria apresentar um achatamento nos polos e uma protuberância no equador, devido à combinação dos movimentos de rotação e da gravidade. A redução do efeito gravitacional no equador, causada pela maior distância ao centro da Terra e pela força centrífuga, explicava a oscilação mais rápida dos pêndulos nesta região. Outras observações também foram feitas em outros locais e apresentaram resultados consistentes, fortalecendo a lei da Gravitação Universal.

Ao sintetizar esses dados e aplicá-los na matemática do inverso ao quadrado, estabeleceu bases de um novo paradigma científico. A nova filosofia centrada no rigor empírico e matemático, tornou-se padrão para avanços subsequentes, pavimentando o caminho para o desenvolvimento contínuo dos segredos do Universo, como a Teoria da Relatividade de Einstein.

## 1.8 O Surgimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR)

A teoria da Gravitação Universal de Newton permaneceu como a principal explicação dos fenômenos gravitacionais por mais de dois séculos, descrevendo com precisão os movimentos dos corpos celestes e terrestres [2]. No entanto, com o avanço da física, novas descobertas, como a anomalia na órbita de Mercúrio, desafiaram o modelo gravitacional de Newton. Foi nesse contexto que Albert Einstein apresentou sua teoria da Relatividade Geral (TRG), revolucionando a compreensão da gravidade.

O desenvolvimento da teoria gravitacional de Einstein (TRG) tem suas raízes na Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Albert Einstein trabalhava como funcionário de patentes em tempo integral, enquanto dedicava suas horas vagas ao estudo da física teórica para desenvolver suas ideias. Nesse período, publicou diversos artigos, entre eles estava a formulação do Princípio da Relatividade. Para este princípio, Einstein baseou-se nas observações sobre a queda dos corpos e nas equações de Maxwell para desenvolvê-lo.

Ao estudar a queda dos corpos, Einstein realizou reflexões semelhantes aos experimentos mentais de Galileu, desprezando a resistência do ar. Em uma de suas análises,

imaginou um homem em queda livre, suspenso no ar, e concluiu que seria impossível, a partir de uma perspectiva local, distinguir se o homem estava caindo em direção à Terra ou se a Terra estava se movendo em sua direção [2] [18]. Essa reflexão levou à conclusão de que, localmente, a experiência da queda livre é indistinguível de um estado de ausência de gravidade, evidenciando o movimento relativo.

Simultaneamente, Einstein investigava o mesmo fenômeno - o movimento relativo - no contexto das equações de Maxwell, que descrevem o eletromagnetismo. Em seu artigo de 1905, *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, analisou o movimento relativo entre um ímã e uma bateria [2]. Ele observou que uma bateria em movimento em relação a um ímã estacionário gerava efeitos elétricos que eram equivalentes aos gerados pelo movimento do ímã em relação a uma bateria fixa. Esses resultados indicaram que os fenômenos de eletricidade e magnetismo dependiam apenas do movimento relativo entre os objetos, sem qualquer relação com um estado absoluto de repouso [18].

Portanto, Einstein percebeu que, enquanto a queda livre e a ausência de gravidade podem ser consideradas equivalentes em um contexto local, a eletricidade e o magnetismo são aspectos complementares de um mesmo fenômeno físico. Embora distintos, essas ideias compartilham um princípio comum: o movimento relativo governa as interações, sem a necessidade de um referencial absoluto. Essa conclusão levou Einstein a pensar que a luz, assim como os campos eletromagnéticos, também não possui propriedades associadas a um repouso absoluto. Um exemplo da ideia de Einstein pode ser observado ao considerar um passageiro em um navio e um espectador na margem. Um feixe de luz é emitido verticalmente do convés de um navio, para o observador na margem, o feixe parecia inclinado e para o passageiro estaria verticalmente [2].

A partir disso, Einstein concluiu que observadores em movimento uniforme em relação uns aos outros podem fazer reivindicações diferentes sobre a realidade aparente, o que leva à conclusão de que a luz possui uma velocidade finita [18].

Nas equações de Maxwell a velocidade da luz é considerada finita e também uma constante. Se Maxwell estivesse certo, a velocidade da luz no vácuo nunca variaria, mas o que varia é a distância entre as ondas eletromagnéticas [2].

Einstein, assim como Newton aceitou o palpite de Kepler sobre as órbitas elípticas, aceitou a constância da velocidade da luz nas equações de Maxwell e chamou sua ideia de *Invariantentheorie*, pois enfatizava o seu princípio: "as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas inerciais" [18] - os mesmos sistemas identificados por Galileu e formalizados por Newton, que se encontram em repouso ou se movem em linha reta em velocidade constante.

Essas ideias levaram à conclusão de que o espaço e tempo deixam de ser absolutos e sejam relativos. Por exemplo, para um objeto que se move a uma velocidade próxima à da luz sofrerá uma contração em sua direção de movimento quando medido por um observador em repouso [18].

Portanto, à medida que suas ideias começaram a ser divulgadas, sua dissonância em relação ao pensamento tradicional chamou a atenção dos físicos contemporâneos. Embora o Universo parecesse consistente e uniforme para todos, as experiências individuais variavam de acordo com cada observador.

### 1.8.1 Antes da Teoria da Relatividade Restrita

Antes de Einstein formular a TRR, já existiam ideias relacionadas à relatividade, como as transformações de Lorentz e grande parte da dinâmica relativística. Esses avanços não

foram obra de um único indivíduo, mas o resultado de contribuições graduais de cientistas, incluindo Hendrik Lorentz e Henri Poincaré.

Einstein não realizou seu trabalho isoladamente, nem superou os cientistas anteriores. Como destaca Martins (2015) [18], a Ciência evolui de maneira coletiva e gradual, apoiando-se nas contribuições de múltiplos pesquisadores brilhantes. A diferença crucial em sua abordagem foi a maneira como reinterpreto esses resultados, empregando uma perspectiva epistemológica.

Hendrik Lorentz foi um físico teórico que desenvolveu as transformações de Lorentz, equações matemáticas que descrevem como o espaço e o tempo se ajustam para diferentes observadores em movimento relativo. Essas transformações foram concebidas para explicar o experimento de Michelson-Morley que não detectou o éter. Lorentz também introduziu conceitos como a dilatação do tempo para conciliar as observações experimentais com as equações de Maxwell e acreditava na existência do éter [18].

Henri Poincaré foi um matemático, físico e filósofo que desempenhou um papel central na formulação inicial da relatividade. Ele desempenhou um papel central na formulação inicial da relatividade. Poincaré reconheceu a constância da velocidade da luz como um princípio fundamental e trabalhou para reconciliar as leis do eletromagnetismo com o princípio da relatividade. Ele também propôs a ideia de que o tempo não era absoluto, mas relativo ao observador. Em 1904, Poincaré apresentou uma versão quase completa da relatividade especial, que incluía muitos dos elementos matemáticos fundamentais usados por Einstein, como as transformações de Lorentz. No entanto, ele não descartou totalmente o conceito de éter e tratou suas ideias mais como um ajuste ao conhecimento existente do que uma nova interpretação fundamental [18].

O que tornou a relatividade restrita de Einstein inovadora foi a sua formulação simplificada em dois postulados, diferente dos trabalhos de Lorentz e Poincaré. Embora o princípio da relatividade já tivesse sido proposto por Poincaré, Einstein foi além argumentando que a física deveria se restringir a lidar apenas com aquilo que pode ser observado e medido, descartando a necessidade do éter [18].

## 1.9 A Teoria da Relatividade Geral: Uma Nova Visão da Gravidade

Após o desenvolvimento da TRR, que explica os fenômenos físicos em sistemas inerciais, Albert Einstein formulou uma teoria mais abrangente, capaz de descrever sistemas em movimento não uniforme. Esse esforço resultou na Teoria da Relatividade Geral.

### 1.9.1 O Princípio de Equivalência

Em 1907, Einstein iniciou as suas reflexões sobre como conciliar a teoria newtoniana da gravitação com a Relatividade Restrita. Nesse contexto, ocorreu o que ele descreveu como “o pensamento mais feliz de sua vida” [2] [12]. Einstein imaginou a situação de um trabalhador caindo de um telhado e, a partir dessa experiência mental, concluiu que, sob perspectiva do trabalhador, este não sentiria o próprio peso, experimentando a inércia, enquanto um observador externo interpretaria que estaria sendo influenciado pela gravidade.

Dessa forma, Einstein propôs o Princípio de Equivalência, sugerindo que a gravidade e a inércia poderiam ser consideradas como manifestações de um único fenômeno. Conse-

quentemente, em notas pessoais, conforme Panek (2019) [2], Einstein escreveu: “erupções do Monte Vesúvio ocorrem em momentos diferentes, mas no mesmo lugar”. Contudo, considerando que a Terra gira em torno de seu eixo, gira em torno do Sol e se move juntamente com o Sol em direção à constelação de Hércules, ele percebeu que não poderia afirmar que as erupções ocorreram no mesmo local no Universo. Seria correto afirmar que: “as erupções do Monte Vesúvio ocorrem no mesmo lugar em relação à Terra” [2].

Essa análise levou Einstein a concluir que a gravidade poderia ser considerada como uma força fictícia, cuja existência está diretamente relacionada ao sistema de referência [12]. Para ilustrar essa ideia, Einstein substituiu o trabalhador em queda por um cenário em que ele se encontra dentro de um elevador<sup>3</sup> na superfície da Terra. Se o cabo do elevador se romper, ele entrará em queda livre com a aceleração da gravidade. Durante a queda, não haverá a força do piso sobre os pés do trabalhador, portanto, ele não perceberá qualquer sensação de peso. Nesse estado, o sistema parecerá indistinguível de um sistema inercial. Com essa observação, Einstein postulou que todos os sistemas em queda livre são equivalentes a sistemas inerciais, no qual os efeitos gravitacionais desaparecem [2] [12]

Einstein, assim como filósofos da época de Newton, segundo Panek (2019) [2] e Pires (2011) [12], Einstein notou que, na mecânica newtoniana, o conceito de massa possui significados distintos. Na Segunda Lei de Newton, a massa é interpretada como uma medida de resistência de um corpo à variação de seu movimento, sendo denominada massa inercial. Por outro lado, na Teoria da Gravitação Universal, a massa é entendida como uma medida de suscetibilidade de um objeto à interação gravitacional, conhecida como massa gravitacional. Apesar de conceitos distintos, ambas as massas são equivalentes, o que permite tratar o elevador em queda livre como sistema inercial [2] [12] [19].

### 1.9.2 A Gravidade e a Curvatura do Espaço-tempo

Einstein percebeu que o princípio de equivalência não poderia ser aplicado em regiões finitas, mas em regiões infinitesimais, em que um campo gravitacional influencia a trajetória da luz, fazendo com que ela se curve [12]. Isso ocorre porque a luz, ao possuir velocidade finita, está sujeita à ação gravitacional, o que implica que também possui massa. De maneira análoga, qualquer sinal que se propague com velocidade finita será desviado pela gravidade, seguindo uma trajetória curva. Essa conclusão levou à ideia central de Einstein: a gravidade não é uma força, mas uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia [2] [12].

Uma das consequências dessa teoria é a dilatação gravitacional do tempo, na qual o tempo flui mais lentamente em campos gravitacionais intensos [12]. Em 1911, Einstein propôs um experimento para observar a intensidade do desvio da luz ao passar próximo à superfície do Sol, sugerindo que poderia ser observado durante um eclipse solar total. No entanto, a estimativa publicada por Einstein naquele ano foi de 0,83 segundo de arco, um valor incorreto que se aproximava da previsão de 0,87 segundo de arco, obtida mais de um século antes com base na teoria newtoniana [20].

O desvio da luz das estrelas distantes provoca uma alteração aparente nas posições das estrelas ao redor do disco solar. Observando da Terra, o efeito do campo gravitacional

---

<sup>3</sup>O elevador utilizado para transporte de pessoas foi inventado em 1854 por Elisha Graves Otis, ao apresentar um novo modelo com freios de segurança que impediam a queda da plataforma. A inovação tornou o transporte de passageiros seguro e viabilizou a construção de edifícios verticais mais altos. O exemplo do elevador é amplamente utilizado para ilustrar os conceitos de Einstein por ser um sistema fechado simples, com o qual a maioria das pessoas está familiarizada, facilitando a compreensão dos fenômenos descritos na Teoria da Relatividade Geral.

do Sol é semelhante ao de uma grande lente de aumento. Após desenvolver essa ideia, Einstein consultou astrônomos para verificar a possibilidade de comprovar o fenômeno durante um eclipse solar no ano seguinte, porém sem sucesso [20].

### 1.9.3 A Geometria e a Colaboração de Marcel Grossmann

Em 1912, Einstein publicou um artigo no qual argumentava que as leis da geometria euclidiana - adequadas para descrever espaços planos - provavelmente não se aplicavam em campos gravitacionais intensos [2]. Quando estudante, Einstein havia ignorado as aulas sobre geometria não euclidiana, considerando um assunto irrelevante para descrever o Universo. No entanto, ele teve que reconhecer que essa abordagem geométrica estava ligada ao Universo [12].

Para avançar em sua teoria, Einstein contou com a colaboração de Marcel Grossmann, seu amigo de longa data desde os tempos universitários. Grossmann era um matemático renomado e possuía conhecimento sobre geometria não euclidiana, e desempenhou um papel essencial no desenvolvimento matemático da teoria. Apesar da valiosa assistência de Grossmann, de acordo com Panek (2019) [2], Einstein chegou a escrever em uma carta a um amigo que a aplicação da matemática tornou suas dificuldades com a teoria da relatividade anterior parecerem brincadeira de criança.

### 1.9.4 A Anomalia da Órbita de Mercúrio

Após seu experimento mental envolvendo a queda livre, Einstein percebeu que poderia utilizar um fenômeno inexplicável para testar sua teoria e as equações matemáticas: a órbita de Mercúrio. Em 1850, Urbain Le Verrier, matemático responsável pela previsão da posição do planeta Netuno, identificou uma discrepância entre a matemática Newtoniana e os movimentos de Mercúrio [2] [12]. Especificamente, quando Mercúrio atingia seu periélio - o ponto de aproximação máxima do Sol - sua posição não coincidia com o previsto pela teoria de Newton.

Essa descoberta levou Einstein a questionar a precisão da teoria newtoniana, e começou a investigar a origem da anomalia. Contudo, durante uma série de quatro palestras que apresentou na Academia Prussiana em Viena, em novembro de 1915, ele não havia encontrado uma explicação matemática para os movimentos de Mercúrio. Apesar disso, ele tinha muito o que relatar e buscava entender onde poderia estar cometendo algum erro em suas análises [2].

Foi somente na metade de sua série de palestras, em 25 de novembro de 1915, que Einstein fez o ajuste crucial introduzindo um termo adicional na equação de campo, na qual descrevia a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia - resultando na versão final da Teoria da Relatividade Geral [21]. Esse ajuste permitiu que suas equações explicassem adequadamente a órbita de Mercúrio, eliminando a discrepância que a teoria newtoniana não conseguia solucionar.

### 1.9.5 Confirmação da Teoria da Relatividade Geral

O evento de 6 de novembro de 1919 representou um marco decisivo tanto na filosofia quanto na Ciência. O experimento foi liderado pelo astrônomo britânico Sir Arthur Eddington, com o objetivo de testar a previsão de Einstein em sua Teoria da Relatividade Geral: a ideia de que a presença de massa e energia curva o espaço ao seu redor [2] [12].

Para realizar esse experimento, Eddington organizou duas expedições - uma para a cidade brasileira de Sobral, no estado do Ceará, e outra para a ilha do Atlântico Sul, no Príncipe, pertencente ao território de São Tomé e Príncipe - com o intuito de observar o eclipse solar total que ocorreria em 29 de maio de 1919. O método consistia em capturar imagens de estrelas que deveriam estar visíveis apenas durante a noite, mas que poderiam ser observadas durante o dia se estivessem alinhadas com o fenômeno do eclipse solar, permitindo a análise da curvatura da luz causada pelo Sol [20].

Durante a análise das fotografias tiradas, descobriram algo notável. As estrelas observadas durante o eclipse não estavam onde deveriam estar, parecia que elas haviam deslocado de um lugar para outro [2]. Então, no dia 6 de novembro de 1919, Sir Frank Watson Dyson, co-líder da expedição na ilha de Príncipe, ao lado de Eddington, anunciou em uma sessão da Royal Society que as equações de Einstein haviam previsto os resultados do eclipse.

Além do desvio da luz, surgiu um método adicional que foi necessário esperar até a década de 1960: o desvio para o vermelho [12]. Esse efeito, que ocorre no espectro eletromagnético, está associado ao funcionamento mais lento de um relógio em regiões com campos gravitacionais intensos.

De acordo com Pires (2011) [12], o princípio baseia-se no comportamento de um átomo quando excitado. Durante esse processo, ele emite luz com um comprimento de onda ou frequência bem específicas. Por exemplo, a frequência da luz emitida por um átomo de sódio no campo gravitacional do Sol será ligeiramente menor do que a emitida por um mesmo átomo em regiões com menor intensidade gravitacional. Este fenômeno é conhecido como desvio gravitacional para o vermelho e foi comprovado por meio de vários experimentos, apresentando um valor de  $1,2 \times 10^{-6}$ , oferecendo uma importante validação experimental para a teoria da relatividade.

## 1.9.6 A Gravitação

A teoria de Newton, com sua descrição da gravitação baseada na atração entre massas e em suas leis universais, dominou a física por mais de dois séculos. No entanto, com a introdução da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, ficou claro que a visão newtoniana era apenas uma aproximação em situações com baixa gravidade e baixas velocidades [2]. A teoria de Einstein substituiu a de Newton ao explicar os fenômenos como a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz pelo Sol, ambos confirmados por experimentos.

Atualmente, a gravitação predominante é descrita pela Teoria da Relatividade Geral, que interpreta a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. A sua aplicação prevê fenômenos, como a existência de buracos negros e ondas gravitacionais detectadas pela primeira vez em 2015 que reforçam sua validade.

Portanto, enquanto a teoria de Newton forneceu as bases para a compreensão inicial da gravidade, a teoria de Einstein a superou ao oferecer uma explicação mais precisa. O futuro da gravitação está atrelado a novos experimentos e na exploração da Teoria da Relatividade Geral que se estendem desde a astrofísica até a tecnologia de satélites.

# Capítulo 2

## A lei da Gravitação Universal

Este capítulo aborda a formulação da Lei da Gravitação Universal, destacando a matemática e sua relação com os movimentos celestes, evidenciando a importância dessa teoria para a física clássica e para o entendimento do Universo.

A Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton foi desenvolvida no livro III de sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Em sua teoria, Newton propôs que a atração gravitacional não se limitava apenas à Terra, mas era uma força universal que agia sobre todos os corpos. Para chegar a essa conclusão, Newton baseou-se no movimento da Lua em torno da Terra, utilizando as Leis de Kepler como referência para a sua análise.

A formulação da teoria foi um marco na física, unindo os movimentos terrestres e dos corpos celestes sob uma única lei universal.

Antes de prosseguir com a lei da Gravitação Universal, é crucial apresentar as Três Leis de Newton e as Três Leis de Kepler, que são fundamentais para compreender o movimento dos corpos celestes.

### 2.1 As Leis do Movimento de Newton

Isaac Newton propôs as Leis do Movimento, que são os pilares fundamentais da mecânica clássica, fornecendo uma descrição de como as forças atuam sobre os corpos e alteram seus estados de movimento. De acordo com Nussenzveig (2015) [22] e Symon (1996) [23], as três leis de Newton são válidas somente em referenciais inerciais e são descritas como:

#### 2.1.1 A Primeira Lei de Newton (Lei da Inércia)

*"Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a alterar esse estado pela ação de forças externas."*

A Lei da inércia permitiu a compreensão do equilíbrio dinâmico dos corpos celestes ao analisar os movimentos orbitais. De acordo com essa lei, um planeta sem a influência da gravitação do Sol se moveria em uma trajetória retilínea com velocidade constante. Contudo, a gravidade do Sol exerce uma força sobre o planeta, fazendo com que o mesmo seja forçado a percorrer uma trajetória elíptica .

### 2.1.2 A Segunda Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica)

*"A variação temporal do momento linear de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele e ocorre na direção dessa força."*

Essa lei é descrita pela equação (2.1)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

Que consiste na relação entre a força, a aceleração e o momento linear de um corpo. Nessa equação,  $\vec{F}$  representa a força que age sobre o corpo, enquanto  $\frac{d\vec{p}}{dt}$  é a taxa de variação do momento  $\vec{p}$  com relação ao tempo. Essa equação indica que a força é a derivada temporal do momento, ou seja, a força resulta da variação do momento ao longo do tempo.

Se a massa do objeto não varia,  $m$  é constante, assim a equação da força se reduz à forma tradicional  $\vec{F} = m\vec{a}$ , em que  $\vec{a}$  é a aceleração do corpo. Essa situação ocorre, por exemplo, um automóvel em movimento, onde a massa do carro permanece constante durante o movimento.

A Segunda Lei de Newton foi fundamental para a gravitação estabelecendo a relação entre a força gravitacional e a aceleração centrípeta, um fator essencial para manter as órbitas dos corpos.

### 2.1.3 A Terceira Lei de Newton (Ação e reação)

*"A toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, mesma linha de ação e sentido oposto."*

A lei da ação e reação, ao afirmar que a força que um corpo exerce sobre outro é igual e oposta, garantiu a simetria nas interações gravitacionais, como a Lua orbitando a Terra.

## 2.2 As Três Leis de Kepler

As leis de Kepler foram formuladas empiricamente a partir das observações realizadas por Tycho Brahe [2]. Essas leis proporcionaram uma descrição dos movimentos planetários ao redor do Sol, estabelecendo as bases para a compreensão do comportamento dos planetas no Sistema Solar. Conforme (Oliveira Filho; Saraiva, 2014) [1] e Nussenzveig (2015) [22] as leis de Kepler são:

### 2.2.1 Primeira Lei de Kepler - Lei das órbitas elípticas

*"Os planetas seguem órbitas elípticas ao redor do Sol, no qual ocupa um dos focos da elipse. Consequentemente, a distância do Sol ao planeta varia ao longo da órbita."*

Uma elipse pode ser definida como o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a soma das distâncias de qualquer ponto a dois focos fixos é constante. A Figura 2.1 ilustra a representação de uma elipse.

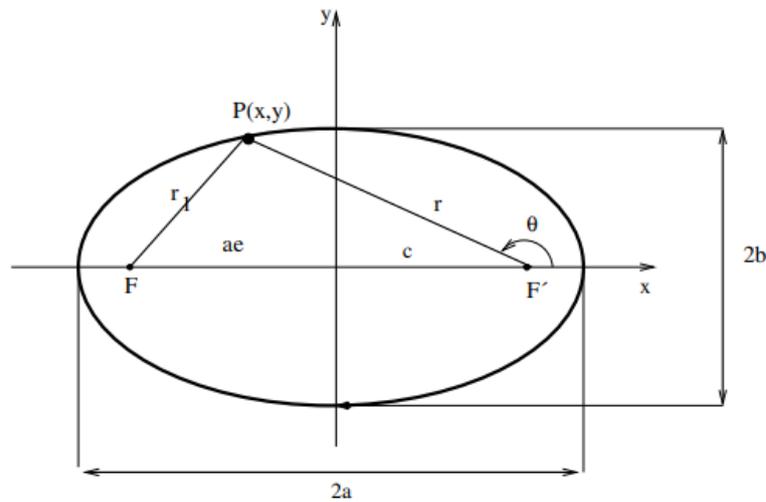


Figura 2.1: Representação de uma elipse. Os focos são denominados  $F$  e  $F'$ , e o ponto  $c$  representa o ponto médio entre os dois focos. O semi-eixo maior, denotado por  $a$ , é a distância do centro da elipse  $c$  até um dos vértices ao longo do eixo maior, em que é o maior diâmetro da elipse. O semi-eixo menor é representado por  $b$ .

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014

Conforme a Figura 2.1 A excentricidade, representada por  $e$  descreve o grau de "achatamento" da elipse, definida pela equação (2.2)

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (2.2)$$

a equação da elipse em coordenadas polares pode ser expressa como

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.3)$$

em que  $r(\theta)$  representa a distância do ponto na elipse ao foco e  $\theta$  é o ângulo polar.

### 2.2.2 Segunda Lei de Kepler - Lei das áreas

*"A reta que conecta um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais."*

Essa lei implica que a velocidade orbital do planeta não é constante ao longo de sua trajetória elíptica. Quando o planeta está mais próximo do Sol (no periélio), ele se move mais rapidamente, enquanto se desloca mais lentamente quando está distante (no afélio) conforme a Figura 2.2. Essa regularidade reflete que o princípio de que a velocidade areal do planeta é constante.

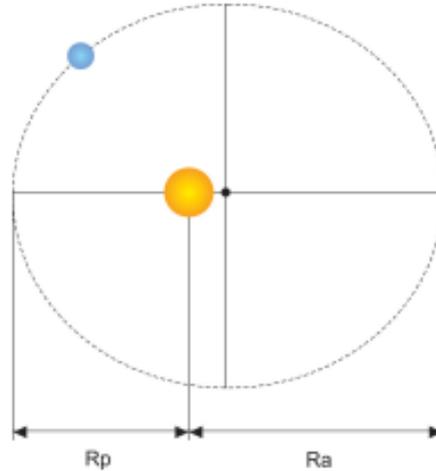


Figura 2.2: Pontos de periélio ( $R_p$ ) e afélio( $R_a$ ) nas extremidades do eixo maior.  
 Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014

### 2.2.3 Terceira Lei de Kepler - Lei Harmônica

*"O quadrado do período orbital de um planeta é diretamente proporcional ao cubo da sua distância média ao Sol."*

Essa relação demonstra que os planetas com órbitas maiores possuem períodos mais longos e se movem mais lentamente em torno do Sol. Além disso, a Lei implica que a força gravitacional entre o Sol e os planetas diminui à medida que a distância ao Sol aumenta, reforçando a dependência inversa da gravidade com o quadrado da distância. A Terceira Lei de Kepler pode ser expressa como:

$$P^2 = K a^3, \quad (2.4)$$

Sendo  $P$  o período do planeta,  $a$  o semi-eixo maior da órbita, e  $K$  uma constante.

Embora Kepler tenha desenvolvido suas leis a partir do estudo dos planetas do Sistema Solar, elas são válidas para qualquer sistema gravitacional, desde satélites artificiais em órbita de planetas até galáxias. Além disso, elas estabeleceram a base conceitual para que Newton formulasse sua Lei da Gravitação Universal, consolidando a gravidade como força responsável pelo movimento dos corpos celestes [12].

## 2.3 Lei da Gravitação para Órbitas Circulares

Para muitos planetas e satélites, a excentricidade das órbitas elípticas é suficientemente pequena, permitindo que estas sejam aproximadas como órbitas circulares [1]. Sob essa aproximação, o movimento orbital, de acordo com a Segunda lei de Kepler, é uniforme, e a aceleração resultante é igual à aceleração centrípeta necessária para manter o corpo em órbita [22].

Ao considerar um corpo em movimento em uma órbita circular de raio  $r$ , em um dado instante  $t$ , o corpo estaria localizado em um ponto de sua trajetória, com uma velocidade denotada por  $\vec{v}_1$ . De acordo com a Primeira Lei de Newton, na ausência de forças externas,

o corpo continuaria seu movimento em linha reta. No entanto, devido à ação de uma força centrípeta, o corpo segue uma trajetória circular.

Após um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o corpo percorreu uma distância dada por  $v \cdot \Delta t$ , sendo  $v$  o módulo da velocidade. Nesse instante, o corpo possui uma nova velocidade  $\vec{v}_2$ , com o mesmo módulo  $v$ , mas com direção diferente devido a curvatura da trajetória.

Considerando o ângulo  $\theta$  formado entre o ponto inicial e o ponto final da trajetória do corpo durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , o qual também corresponde ao ângulo entre os vetores de velocidade  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , esse ângulo pode ser expresso pela equação (2.5)

$$\theta = \frac{v \cdot \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad (2.5)$$

O primeiro termo descreve a variação angular do movimento do corpo ao percorrer uma distância  $v \times \Delta t$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , sendo  $r$  o raio da órbita circular. Consequentemente, o segundo termo representa a variação relativa da velocidade em termos da velocidade inicial. Vale destacar que, enquanto a aceleração centrípeta altera apenas a direção da velocidade, o módulo desta permanece constante ao longo da trajetória circular [1].

A aceleração centrípeta, responsável pela mudança de direção, pode ser expressa pela equação (2.6)

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Como a velocidade tangencial  $v$  está relacionada à distância percorrida no intervalo de tempo  $\Delta t$  pela equação  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , substituindo essa relação a equação da aceleração centrípeta (2.6) obtém-se a equação (2.7)

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (2.7)$$

Esse resultado demonstra que a aceleração centrípeta é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade tangencial e inversamente proporcional ao raio da órbita [22]. A aceleração centrípeta é vetorial e sua direção é apontada para o centro da trajetória circular que é oposta ao versor  $\hat{r}$ , isso explica o sinal negativo na equação.

Se o corpo possui massa  $m$ , de acordo com a Segunda Lei de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ), está sujeito a uma força central que é responsável por produzir a aceleração centrípeta. Essa força é expressa pela equação (2.8)

$$\vec{F} = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}. \quad (2.8)$$

## 2.4 A Gravitação Universal

Newton, ao estender sua teoria para afirmar que a força de atração gravitacional se estende até a Lua, demonstrando que a aceleração centrípeta necessária para mantê-la em órbita é proveniente dessa força, propôs a hipótese da existência de uma força de atração universal entre todos os corpos no Universo (Oliveira Filho; Saraiva, 2014).

A equação (2.8) descreve a força centrípeta que o Sol exerce sobre um planeta de massa  $m$  e velocidade  $v$  a uma distância  $r$  do Sol. Considerando uma órbita circular, que pode ser generalizada para diferentes tipos de órbitas, o período  $P$  do planeta pode ser descrito pela equação (2.9)

$$P = \frac{2\pi r}{v} \implies v = \frac{2\pi r}{P}. \quad (2.9)$$

Nessa equação,  $2\pi r$  representa o comprimento total da trajetória circular, sendo a circunferência do círculo. De acordo com a Terceira Lei de Kepler,  $P^2 = Kr^3$ , e ao substituí-la na equação (2.9) obtém-se

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{Kr}, \quad (2.10)$$

na qual descreve a relação entre a velocidade orbital de um corpo em movimento circular e o raio de sua órbita, considerando uma constante  $K$ .

Portanto, a velocidade  $v^2$  é inversamente proporcional a  $r$  ( $v^2 \propto \frac{1}{r}$ ). Isso significa que, em órbitas circulares, a velocidade do corpo diminui à medida que sua distância do centro de atração, como o Sol, aumenta [1].

Considerando  $m$  como massa do planeta e  $M$  como a massa do Sol, a equação que descreve a força centrípeta (2.8), exercida pelo Sol sobre o planeta é representada por

$$F \propto \frac{m}{r^2}.$$

Segundo a Terceira Lei de Newton, o planeta exerce uma força de mesma magnitude, mas de direção oposta, sobre o Sol. Portanto, a força centrípeta que mantém o planeta em órbita é dada por

$$F \propto \frac{M}{r^2},$$

e conseqüentemente, Newton deduziu a força de atração gravitacional entre o planeta e o Sol que pode ser expressa pela equação (2.11)

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}} \quad (2.11)$$

A constante  $G$  representa a constante de proporcionalidade associada a força gravitacional. Newton concluiu que, para que a Lei da Gravitação Universal seja válida, deve existir uma força de atração para quaisquer dois corpos no Universo [1]. Essa força é diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias.

## 2.5 Leis de Kepler Generalizadas

Isaac Newton, ao combinar suas leis do movimento com a Lei da Gravitação Universal, foi capaz de deduzir as três leis de Kepler. Elas descreviam com precisão o movimento dos planetas ao redor do Sol. No entanto, eram limitadas ao contexto de observações astronômicas. Por meio de sua nova teoria, Newton forneceu uma explicação teórica para as leis de Kepler, demonstrando que elas são conseqüências naturais da atração gravitacional entre os corpos celestes. Dessa forma, ele foi capaz de ampliar as aplicações desde planetas até satélites, como será visto nesta seção utilizando a referência [1].

Considerando a lei da Gravitação e a segunda lei de Newton  $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$  em que  $\ddot{\vec{r}}$  representa a aceleração do corpo, sendo a segunda derivada da posição  $r$  em relação ao tempo, a força gravitacional é expressa pela equação (2.12)

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GMm}{r^3}\hat{r}. \quad (2.12)$$

A lei da Ação e Reação de Newton implica que a aceleração do outro corpo, com massa  $M$ , seja

$$M\ddot{\vec{r}}_M = \frac{GMm}{r^3}\hat{r}, \quad (2.13)$$

e a distância entre os corpos pode ser expressa como

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$$

onde  $\vec{r}_m$  e  $\vec{r}_M$  são os vetores de posição dos corpos  $m$  e  $M$ , respectivamente, e  $r$  representa a distância vetorial entre os dois corpos. As equações de movimento para cada corpo podem ser reescritas como as equações (2.14) e (2.15)

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GM}{r^3}\hat{r} \quad (2.14)$$

$$\ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm}{r^3}\hat{r}. \quad (2.15)$$

Essas equações descrevem a aceleração de cada corpo devido à força gravitacional entre eles. Subtraindo as duas equações, obtém-se (2.16)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\hat{r} \quad (2.16)$$

na qual termo  $M+m$  representa a soma das massas dos dois corpos. Definindo-se  $\mu = G(M+m)$ , temos a equação simplificada (2.17)

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0}, \quad (2.17)$$

que representa uma equação diferencial vetorial de segunda ordem, na qual descreve o movimento relativo entre dois corpos sob a influência da gravitação. A solução dessa equação não apenas determina a trajetória relativa dos corpos, como também demonstra princípios fundamentais, como a conservação de energia e do momento angular [1] [22]. Esses resultados emergem naturalmente das propriedades das forças gravitacionais alinhadas com as leis de Newton.

### 2.5.1 Conservação da Energia Total do Sistema

Para determinar a solução que conduz à conservação da energia total do sistema descrito pela equação (2.17), é necessário multiplicar escalarmente a equação pelo vetor  $\dot{\vec{r}}$ , que resulta na equação (2.18)

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad (2.18)$$

em que o produto escalar  $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$  representa a variação da energia cinética. Enquanto  $\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$  está associado à energia potencial gravitacional do sistema. Como a velocidade é dada

por  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  e a aceleração  $\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ . Substituindo essas relações na equação diferencial inicial obtém-se a equação (2.19)

$$\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0. \quad (2.19)$$

Podemos aplicar um produto escalar entre  $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$ , que resulta em:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = rv \cos \alpha \quad (2.20)$$

onde  $\alpha$  representa o ângulo entre o vetor  $\vec{r}$  e o vetor velocidade  $\dot{\vec{r}}$ . Aplicando o produto escalar novamente, mas em  $\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ , temos:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = v\dot{v} \cos(-\alpha), \quad (2.21)$$

em que o componente tangencial da aceleração contribui para o produto escalar. O ângulo é negativo pois o vetor da aceleração tangencial está orientado na direção oposta ao vetor posição.

Como  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ , isso implica que o produto escalar permanece inalterado, o que facilita o uso das derivadas temporais

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = v\dot{v} \quad (2.22)$$

onde o resultado é a taxa da variação da energia cinética

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) = -\frac{\mu\dot{r}}{r^2}. \quad (2.23)$$

Somando as derivadas temporais, obtém-se a equação (2.24)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Isso implica que permanece constante ao longo do tempo, o que conduz à formulação da equação da conservação de energia para o sistema de dois corpos (2.25)

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \epsilon = \text{constante} \quad (2.25)$$

sendo,  $\frac{1}{2}v^2$  a energia cinética,  $-\frac{\mu}{r}$  a energia potencial gravitacional e  $\epsilon$  a energia total do sistema. Substituindo  $\mu = G(m + M)$ , a equação resulta em:

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m + M)}{r} = \epsilon = \text{constante}}. \quad (2.26)$$

Essa equação expressa que a energia total do sistema é constante ao longo do movimento dos corpos no campo gravitacional. Isso é uma manifestação da conservação de energia no sistema gravitacional [1].

## 2.5.2 Conservação do momento angular

Para encontrar a solução que descreve a conservação do momento angular, é necessário multiplicar vetorialmente a equação de movimento (2.17) pelo vetor  $\vec{r}$  à esquerda, que resulta na equação (2.27)

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0. \quad (2.27)$$

Como  $\vec{r} \times \vec{r} \equiv 0$ , o termo  $\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r}$  desaparece, resultando em

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0. \quad (2.28)$$

Utilizando a regra da derivada do produto vetorial entre  $\vec{r}$  e a velocidade  $\dot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}. \quad (2.29)$$

Como o termo  $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \equiv 0$ , a equação se reduz a:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0. \quad (2.30)$$

O resultado implica que o termo  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  é uma constante no tempo. Essa constante é denominada momento angular  $\vec{h}$

$$\boxed{\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} = \text{constante}} \quad (2.31)$$

na qual significa que o momento angular de um corpo em órbita sob a ação de uma força central é conservado. O momento angular é uma quantidade vetorial que depende da posição e da velocidade do corpo [22] [1].

## 2.5.3 A Primeira Lei de Kepler

Para generalizar a primeira lei de Kepler temos que multiplicar vetorialmente a equação de movimento (2.17) por  $\vec{h}$ . O resultado é dado pela equação (2.32)

$$\vec{r} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r}). \quad (2.32)$$

O lado esquerdo da equação (2.32) pode ser reescrita usando a propriedade do produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

que resulta em

$$-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r}). \quad (2.33)$$

Ao utilizar a relação  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ , temos a expressão

$$\frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r}) = \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} \quad (2.34)$$

e utilizando a identidade vetorial

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

e em seguida substituindo os termos:

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

Temos o seguinte resultado (2.35)

$$\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = \frac{\mu}{r^3}\vec{v}r^2 - \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} = \frac{\mu}{r}\vec{v} - \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} \quad (2.35)$$

Como a taxa de mudança da direção do raio vetor que aponta do centro de massa de um corpo para outro é representado por

$$\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\mu}{r}\vec{v} - \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}. \quad (2.36)$$

O lado direito da equação (2.32) pode ser reescrito como

$$\frac{\mu}{r^3}(\vec{h} \times \vec{r}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (2.37)$$

Portanto, o lado esquerdo da equação (2.32), pode ser reecrito por

$$\vec{r} \times \vec{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}). \quad (2.38)$$

Pois,

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{h}}.$$

Como  $\vec{h}$  é constante ( $\frac{d\vec{h}}{dt} = 0$ ). A equação pode ser apresenta como

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (2.39)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo obtém-se (2.40)

$$\vec{r} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r}\vec{r} + \vec{\beta}, \quad (2.40)$$

em que  $\vec{\beta}$  é um vetor constante que depende das condições iniciais do sistema. O primeiro termo da direita representa o efeito direto da força gravitacional na trajetória do corpo. Até esta etapa foi encontrado dois vetores constantes  $\vec{h}$  e  $\vec{\beta}$  e uma constante escalar  $\epsilon$ , contudo, elas não são todas independentes. Multiplicando a equação (2.40) escalarmente por  $\vec{r}$ , temos:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r}\vec{r} \cdot \vec{r} + \beta\vec{r}. \quad (2.41)$$

Como

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

Obtemos a equação (2.42)

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r}r^2 + \beta r \cos \gamma, \quad (2.42)$$

em que  $\gamma$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{\beta}$ . Como  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ , obtemos:

$$h^2 = \mu r + \beta r \cos \gamma, \quad (2.43)$$

ou

$$h^2 = r\mu \left( 1 + \frac{\beta}{\mu} \cos \gamma \right). \quad (2.44)$$

Ao isolar  $r$ , o resultado é a equação da trajetória (2.45)

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{\beta}{\mu} \cos \gamma} \quad (2.45)$$

e a equação de uma cônica com foco na origem:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}} \quad (2.46)$$

em que  $p$  é chamado de *semi-lactus rectum*, uma quantidade que caracteriza a trajetória de um corpo sob a ação de uma força central,  $e$  é a excentricidade, e  $\theta$  o ângulo entre o foco e o vetor posição  $\vec{r}$ .

Podemos comparar  $\mu = G(m + M)$  com a equação da elipse, que resulta na equação da trajetória que descreve uma elipse com:

$$h^2 \mu \equiv p = a, \quad (2.47)$$

e

$$e = \frac{\beta}{\mu}, \quad (2.48)$$

sendo  $p$  o *semi-lactus rectum*,  $e$  a excentricidade da elipse, e  $\theta = \gamma$  é o ângulo entre o ponto da elipse mais próximo do foco (pericentro) e o vetor posição  $\vec{r}$ . Essa é a demonstração da primeira lei de Kepler, na qual diz que a órbita é elíptica [1].

Para  $\frac{\beta}{\mu} < 1$  o movimento é finito e a órbita é uma elipse. Caso  $\frac{\beta}{\mu} \geq 1$ , o movimento torna-se infinito. Se  $e = 1$  o corpo segue uma trajetória parabólica, e se  $e > 1$ , a trajetória é hiperbólica, sendo comum em cometas e planetas.

Da equação que introduziu  $\vec{B}$  temos:

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \frac{\mu}{r} \vec{r}. \quad (2.49)$$

Para calcular  $\beta^2$  utiliza-se a relação:

$$\beta^2 = (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) + \mu^2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} - 2 (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \frac{\mu}{r} \vec{r}. \quad (2.50)$$

Como  $\dot{\vec{r}}$  é perpendicular a  $\vec{h}$ , pela definição do momento angular  $\vec{h}$ :

$$|\dot{\vec{r}} \times \vec{h}| = |\dot{\vec{r}}| |\vec{h}| \implies (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = v^2 h^2. \quad (2.51)$$

Substituindo a relação acima na equação de  $\beta^2$

$$\beta^2 = v^2 h^2 + \mu^2 - 2\mu r \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{r}. \quad (2.52)$$

Contudo, sabemos que  $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{h}$ , portanto, a equação pode ser reescrita utilizando propriedades do produto vetorial

$$[(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{r}] = -[(\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r}] = [\vec{h} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})],$$

e como  $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{h}$ , obtemos

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{r} = h^2. \quad (2.53)$$

Substituindo em  $\beta^2$ :

$$\beta^2 = v^2 h^2 + \mu^2 - 2\frac{\mu}{r} h^2, \quad (2.54)$$

sendo  $e = \frac{\beta}{\mu}$ , e  $\beta^2 = \mu^2 e^2$ , a equação torna-se

$$\mu^2 e^2 - \mu^2 = v^2 h^2 - 2\frac{\mu}{r} h^2 = 2h^2 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 2h^2 \epsilon, \quad (2.55)$$

que simplificando, obtém-se

$$\boxed{\mu^2(e^2 - 1) = 2h^2\epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1).} \quad (2.56)$$

Dessa forma, foi provado que a excentricidade depende da energia do sistema e que a lei das orbitas elípticas dos planetas é uma consequência do tipo de força que atua entre os planetas e o Sol. Newton mostrou que as únicas órbitas possíveis para um corpo interagindo gravitacionalmente com outro são cônicas: círculo, elipse, parábola ou hipérbole [1] [24].

As cônicas foram estudadas pelo Apolônio de Perga, um dos matemáticos mais influentes da antiguidade. O teorema de Apolônio estabelece que uma cônica pode ser vista como uma "seção cônica" obtida pela interseção de um cone com um plano [25]. Dependendo do ângulo e da posição do plano em relação ao cone, diferentes tipos de cônicas são formados conforme ilustrado na Figura 2.3

## Tipos de Órbitas e Relações com a Energia

De acordo com os estudos apresentados por [1], estão enunciados as características das órbitas e os critérios das energias que determinam cada uma dessas trajetórias.

1. **Círculo:** Pode ser considerado uma elipse com excentricidade  $e = 0$ , e os semi-eixos maior e menor são iguais ( $a = b$ ). Os planetas que descrevem órbitas circulares possuem uma velocidade e aceleração centrípeta constante, o que implica em uma energia potencial e cinética constantes e negativa conforme a equação (2.57). A energia total negativa significa que o planeta está gravitacionalmente ligado ao corpo central e, conseqüentemente não consegue escapar do sistema.

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a}. \quad (2.57)$$

2. **Elipse:** A cônica mais comum das órbitas planetárias e corresponde a uma excentricidade  $0 < e < 1$ . O semi-eixo maior e o menor definem o tamanho e a forma da órbita. O planeta segue uma trajetória que o leva a se aproximar e se afastar do Sol

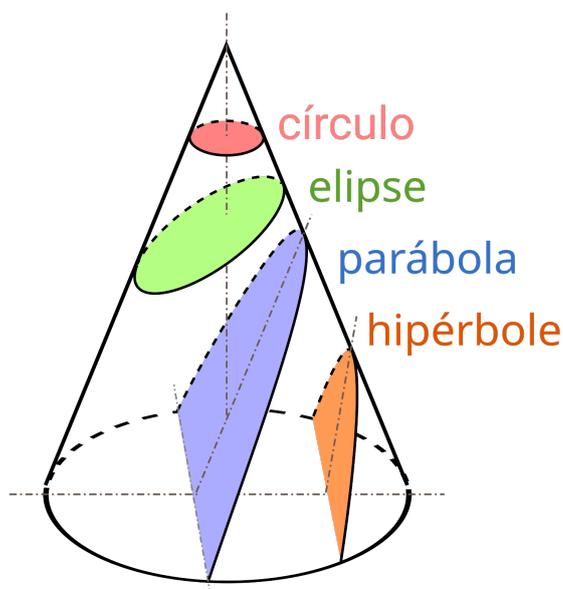


Figura 2.3: Ilustração de um cone com a representação das cônicas: Círculo, elipse, parábola e hipérbole.

Fonte: Adaptado de Wikimedia Commons [26].

de maneira periódica, e a energia do sistema está em equilíbrio, mas com energia negativa conforme a equação (2.57), o que permite que o planeta não escape espontaneamente. Ele pode se afastar ou se aproximar do corpo central, mas permanece gravitacionalmente ligado.

3. **Parábola:** Uma parábola pode ser considerada como uma elipse cuja excentricidade  $e = 1$  e semi-eixo maior  $a = \infty$ . Essa órbita descreve um movimento não periódico, sendo mais comum em cometas em aproximações muito próximas ao Sol. Como a energia total do sistema é igual a zero, representada pela equação (2.58), o corpo consegue escapar da atração gravitacional de um corpo central com uma velocidade igual à velocidade de escape.

$$\epsilon = 0. \quad (2.58)$$

4. **Hipérbole:** Uma hipérbole também pode ser considerada uma elipse com excentricidade  $e > 1$  e semi-eixo maior negativo  $a < 0$ . Essa órbita é característica de objetos que vem de fora do Sistema Solar e são desviados pela atração gravitacional do Sol. A excentricidade maior que 1 reflete a energia do sistema é maior que zero e representada pela equação (2.59), que é o suficiente para que o objeto escape da atração gravitacional do Sol.

$$\epsilon = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1). \quad (2.59)$$

Em suma, o tipo de órbita de um corpo em interação gravitacional com um corpo central está diretamente relacionado à energia total do sistema [27].

## 2.5.4 Segunda Lei de Kepler

A dedução da segunda lei de Kepler parte da conservação do momento angular [1].

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (2.60)$$

Em coordenadas polares, o vetor velocidade pode ser representado como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\Phi}{dt} \hat{e}_\Phi + \frac{dr}{dt} \hat{e}_r$$

onde  $\hat{e}_\Phi$  é o vetor unitário na direção de  $\Phi$  e  $\hat{e}_r$  o vetor unitário na direção  $\vec{r}$ . Contudo, o termo  $\hat{e}_r$  não contribui para o momento angular, pois ele é paralelo ao vetor  $\vec{r}$ , e o produto vetorial de dois vetores paralelo é zero. Portanto,

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = h = r \left( r \frac{d\Phi}{dt} \right) \sin(\hat{e}_r, \hat{e}_\Phi)$$

Mas  $\hat{e}_\Phi$  e  $\hat{e}_r$  são perpendiculares entre si, então temos

$$h = r^2 \dot{\Phi} = \text{constante}.$$

Considerando  $P_1$  e  $P_2$  duas posições sucessivas do corpo num intervalo  $dt$ , conforme descreve a Figura 2.4. A área nesse intervalo de tempo resulta na equação (2.61)

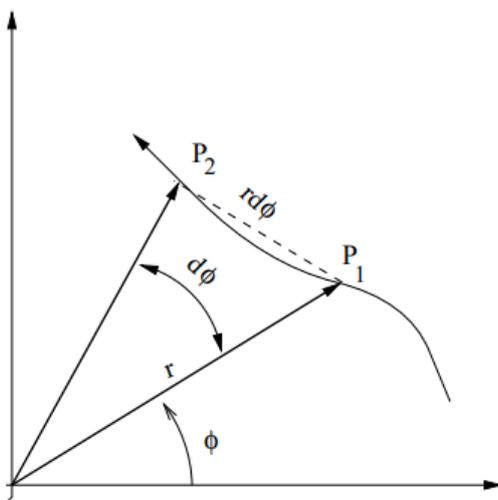


Figura 2.4: Ilustração dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  em um intervalo de tempo, representados em coordenadas esféricas.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

$$dA = \frac{r \cdot r \delta\phi}{2}, \quad (2.61)$$

ou

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{\delta\Phi}{dt}, \quad (2.62)$$

Para  $dt \rightarrow 0$ , a Lei das Áreas é representada pela equação (2.63)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\Phi}}{2} = \frac{h}{2}. \quad (2.63)$$

Como a conservação do momento angular prova que  $h$  é uma constante, a lei das áreas também é uma constante [1]. A lei das áreas de Kepler é, portanto, uma consequência direta da lei de conservação do momento angular.

### 2.5.5 Terceira Lei de Kepler: A Constante K

Considerando dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , que se encontram em órbita circular ao redor de um centro de massa comum. Suas distâncias ao centro de massa são  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, eles possuem velocidades  $v_1$  e  $v_2$ . A força de atração gravitacional entre eles é expressa pela Lei da Gravitação Universal (2.64)

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2}. \quad (2.64)$$

Para que os corpos permaneçam em órbita circular, a força gravitacional deve atuar como força centrípeta. Para cada corpo a força é expressa pelas equações

$$F_1 = \frac{m_1v_1^2}{r_1}, \quad (2.65)$$

$$F_2 = \frac{m_2v_2^2}{r_2}. \quad (2.66)$$

Como são órbitas circulares, e por definição de centro de massa, os períodos são os mesmos, caso contrário, o centro de massa se moveria [22], temos

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \Rightarrow v_1^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2}, \quad (2.67)$$

e, similarmente para  $m_2$ . Para que os corpos permaneçam em órbitas, as forças precisam ter módulos idênticos

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2}. \quad (2.68)$$

Para  $m_2$ :

$$\frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2} \quad (2.69)$$

eliminando-se  $m_1$  na primeira equação e  $m_2$  na segunda, podemos somar para obter:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1 + r_2)}{P^2}. \quad (2.70)$$

Resultando na equação do período  $P$  (2.71)

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2 G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^3}}. \quad (2.71)$$

Comparando a equação com a forma original da terceira lei de Kepler, sendo  $a = (r_1 + r_2)$ , obtemos a equação (2.72)

$$K = \frac{4\pi^2 G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^3} \quad (2.72)$$

A Equação significa que a constante  $K$  só é constante realmente se  $(m_1 + m_2)$  permanece constante, sendo o para os planetas do Sistema Solar.

Todos os planetas tem massa inferior que a massa do Sol, portanto a soma da massa do Sol e a massa do planeta é sempre aproximadamente a mesma, independente do planeta [?]. No entanto, Kepler, ao formular a sua terceira lei não percebeu a dependência com a massa.

Se for considerado sistemas onde os corpos principais são diferentes, então as razões  $\frac{P^2}{a^3} = K$  serão diferentes. Um exemplo são os satélites de Júpiter, eles possuem a mesma razão  $\frac{P^2}{a^3} = K_J$ , sendo possível considerar constante entre eles. Contudo, a constante é diferente da razão  $\frac{P^2}{a^3} = K_\odot$  aos planetas do Sistema Solar [1]. Para estabelecer a igualdade é necessário introduzir a massa:

$$(M_\odot + m_p) \left( \frac{P^2}{a^3} \right)_\odot = (M_J + m_s) \left( \frac{P^2}{a^3} \right)_J = \text{constante} \quad (2.73)$$

Considerando as massas dos planetas desprezáveis à massa do Sol e as massas dos satélites desprezáveis à massa de Júpiter, representando a razão pela letra  $K$  obtemos

$$M_\odot K_\odot = M_J K_J = \text{constante}. \quad (2.74)$$

Para qualquer sistema que a massa de um corpo seja muito maior do a massa dos corpos que o orbitam, a equação torna-se

$$M_1 K_1 = M_2 K_2 = \dots = M_n K_n = \text{constante}, \quad (2.75)$$

onde  $K_n$  é a razão entre o quadrado do período e o cubo do semi-eixo maior da órbita para corpos do sistema de massa  $M_n$ .

Pela equação da constante  $K$ , o valor da constante, desprezando a massa é  $4\pi^2 G$ , portanto

$$M_1 K_1 = M_2 K_2 = \dots = M_n K_n = \frac{4\pi^2}{G}. \quad (2.76)$$

Para casos, como sistemas binários de estrelas, que não é possível desprezar a massa de nenhum corpo é correto escrever a equação como

$$(M + m)_1 K_1 = (M + m)_2 K_2 = \dots = (M + m)_n K_n = \frac{4\pi^2}{G}. \quad (2.77)$$

## Determinação de massas

A terceira Lei de Kepler derivada por Newton permite determinar as massas de corpos astronômicos, desde que esse corpo tenha outro orbitando-o [1].

A partir da equação anterior, temos

$$(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \quad (2.78)$$

A massa medida será sempre a massa do sistema (soma da massa dos dois corpos), mas se um deles for muito mais massivo que o outro, pode-se considerar que a massa medida é a massa do corpo de maior massa.

No sistema internacional de unidades  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  [22]. Entretanto, na Astronomia é mais conveniente adotar outras unidades sem ser as do sistema internacional.

Tratando de sistemas nos quais o corpo maior é uma estrela, é de costume determinar sua massa em unidades de massa do Sol ou massas solares, seus períodos em anos e a distância entre si em unidades astronômicas [1] [27].

Em sistemas em que o corpo maior é um planeta, é conveniente expressar sua massa em unidades de massas da Terra, seu período em meses siderais e suas distâncias relativas em termos da distância entre Terra e Lua [1]. Nesses sistemas particulares, a terceira lei de Kepler pode ser escrita como

$$\boxed{M + m = \frac{a^3}{P^2}} \quad (2.79)$$

sendo uma equação útil para a determinação de massas de corpos astronômicos. Se observar o período orbital e a distância de um satélite a seu planeta, pode-se calcular a massa combinada do planeta e a do satélite, em massas solares ou massas terrestres. Como a massa do satélite é muito pequena comparada com a massa do planeta, a massa calculada é essencialmente a massa do planeta.

Da mesma forma, observando-se o tamanho da órbita de uma estrela dupla e o seu período orbital, pode-se deduzir as massas das estrelas no sistema binário. Podendo utilizar a terceira lei de Kepler na forma revisada por Newton para estimar a massa da Via-Láctea e de outras galáxias [27].

## Equação da Energia

Para descrever e entender o comportamento das órbitas dos corpos celestes, é fundamental compreender a equação da energia. Ela relaciona a energia total do sistema com a forma e o comportamento da órbita [1] [27].

Derivando a equação da energia (2.25) para calcular o valor do momento angular e da energia no periélio, começamos com a equação do momento angular  $h = \vec{r} \times \vec{v}$ , que em uma órbita elíptica, o momento angular é constante, contudo, no periélio a distância é  $r_p$  e a velocidade é  $v_p$ , então, o momento angular no periélio é representado como

$$h = r_p v_p. \quad (2.80)$$

Para uma órbita elíptica, a distância em qualquer ponto da órbita é dada pela equação:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

No periélio o valor de  $\theta$  é zero, então  $\cos \theta = 1$ , simplificando a equação como

$$r_p = a(1 - e), \quad (2.81)$$

que representa a distância no periélio de uma órbita elíptica. E para o momento angular de um corpo orbitando ao redor de um foco:

$$h = r_p v_p. \quad (2.82)$$

Contudo,  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares entre si. Para a energia (2.25) temos:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\ \epsilon &= \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \\ \epsilon &= \frac{1}{r_p} \left( \frac{h^2}{2r_p^2} - \mu \right).\end{aligned}\tag{2.83}$$

Por outro lado, da definição do *semi-lactus rectum*, a equação  $h^2 = \mu p$  relaciona o momento angular  $h$  e o *semi-latus*  $p$ . Ao substituir para  $p = a(1 - e^2)$  temos

$$h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2).\tag{2.84}$$

Substituindo  $h$  e  $r_p$  em  $\epsilon$  temos a relação

$$\epsilon = \frac{1}{a(1 - e)} \left[ \frac{\mu a(1 - e^2)}{2a(1 - e)} - \mu \right] = \frac{\mu}{a(1 - e)} \left[ \frac{(1 + e)^2}{2} - 1 \right],\tag{2.85}$$

pois  $(1 - e)(1 + e) = 1 - e^2$ , simplificando-se

$$\epsilon = \frac{\mu}{2a} \left[ \frac{(1 + e) - 2}{(1 - e)} \right] = -\frac{\mu(1 - e)}{2a(1 - e)}.\tag{2.86}$$

Obtemos a equação (2.87)

$$\boxed{\epsilon = -\frac{\mu}{2a}}\tag{2.87}$$

Essa equação descreve a energia total de um corpo e é válida para qualquer órbita cônica e mostra que o semi-eixo maior da órbita só depende da energia do sistema [1] [27].

$$\epsilon < 0 \Rightarrow a > 0 \quad (\text{Elipse});$$

$$\epsilon = 0 \Rightarrow a = \infty \quad (\text{Parábola});$$

$$\epsilon > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{Hipérbole}).$$

Para encontrar a excentricidade em termos da energia, temos que partir da definição de *semi-lactus rectum*  $p$ ,

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \Rightarrow a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}.\tag{2.88}$$

Substituindo na equação (2.87) temos:

$$-\frac{\mu^2(1 - e^2)}{2h^2}.\tag{2.89}$$

Escrevendo a excentricidade em termos da energia:

$$-\frac{2h^2\epsilon}{\mu^2} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2h^2\epsilon}{\mu^2}.\tag{2.90}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2h^2\epsilon}{\mu^2}} \quad (2.91)$$

Relacionando a equação da energia (2.25) e a equação (2.87), obtem-se

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (2.92)$$

Em termos de  $v$

$$\boxed{v = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + \epsilon\right)}}, \quad (2.93)$$

que é a equação da velocidade do sistema.

### Velocidade Circular

Nas órbitas circulares  $a \equiv r$ , ao substituir na equação da velocidade (2.93) temos:

$$\boxed{v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}}. \quad (2.94)$$

que é a equação da velocidade circular. Para uma órbita circular a energia total é negativa:

$$\epsilon = \frac{\mu}{2r} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} = -\frac{G(M+m)}{2r} < 0.$$

### Velocidade de Escape

A partir da equação de velocidade pode-se deduzir a velocidade de escape do sistema, que representa a velocidade mínima para que o corpo escape da atração gravitacional [22]. Essa velocidade é por definição aquela com a qual o corpo chega com velocidade zero no infinito ( $v = 0$  em  $r = \infty$ ), o que representa uma órbita parabólica, sendo  $e = 0$ . Assim, uma órbita parabólica pode ser considerada uma órbita elíptica com  $e = 1$  e  $a =$  infinito. Nesse caso,

$$\epsilon = \frac{v_{\text{esc}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}} = \boxed{\sqrt{2v_{\text{circ}}}}. \quad (2.95)$$

## 2.5.6 Problema de N corpos

Neste trabalho foi abordado somente a interação entre dois corpos, um problema que pode ser resolvido de maneira analítica utilizando as Leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal de Newton [27]. Contudo, ao introduzir um terceiro corpo ou mais, a análise torna-se significativamente mais complexa, configurando o chamado problema de N corpos. Nesse caso, cada corpo do sistema influencia gravitacionalmente os demais, gerando interações mútuas que dificultam a obtenção de soluções analíticas gerais [23].

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014) [1], o problema de N corpos surge naturalmente em sistemas gravitacionais, como o Sistema Solar, na qual o movimento de cada planeta é influenciado não apenas pela atração gravitacional do Sol, mas também pelas

forças exercidas por outros planetas, satélites e até mesmo asteróides e cometas. Entretanto, apesar da massa do Sol ser superior à de qualquer planeta no Sistema Solar, essas perturbações tornam-se relevantes em estudos que exigem maior precisão.

Embora o problema de dois corpos apresente uma solução analítica, o problema de três corpos ou mais apresenta desafios matemáticos que no entanto, casos específicos, sob condições restritivas, permitem a obtenção de soluções aproximadas [1] [27].

O problema de N corpos intrigou muitos matemáticos e físicos, como Leonhard Euler e Joseph - Louis Lagrange [1]. Eles desenvolveram soluções específicas para o problema restrito de três corpos, assumindo que um dos corpos possui massa desprezível em comparação aos outros, de modo que sua influência gravitacional nos corpos mais massivos pode ser ignorada.

Nesse contexto, destacam-se os chamados pontos de Lagrange, que são posições onde a interação gravitacional dos corpos massivos e a força centrífuga de um corpo equilibram-se, permitindo que este permaneça em equilíbrio relativo [1]. Esses pontos possuem aplicação como a colocação de satélites artificiais e até mesmo telescópio, como o James Webb.

Apesar das contribuições, a solução para sistemas complexos não pode ser expressa de forma analítica. As trajetórias dos corpos são determinadas por métodos numéricos, utilizando simulações computacionais que permitem calcular o comportamento orbital ao longo do tempo [27]. De acordo com a matemática, em sistemas onde os três corpos possuem massas e distâncias comparáveis, ocorre uma dinâmica caótica, na qual as interações gravitacionais competem entre si.

A análise do problema de N corpos desempenhou um papel crucial para a descoberta de novos planetas e ainda continua, permitindo a compreensão desde sistemas planetários até a evolução de galáxias inteiras.<sup>1</sup>

## 2.5.7 Satélites Artificiais

Newton considerou a possibilidade da existência de satélites artificiais da Terra. ele discutiu o que aconteceria se projéteis fossem lançados horizontalmente com velocidades iniciais crescentes em um topo de uma montanha muito alta conforme a Figura 2.5 [22]. Inicialmente seriam trajetórias parabólicas, contudo, para uma velocidade inicial suficientemente grande, Newton observou que o projétil descreveria uma órbita fechada em torno da Terra, voltando ao ponto de partida [22]. E se os lançamentos fossem feitos em altitudes crescente, os corpos descreveriam arcos concêntricos com a Terra, e continuariam circulando nos céus nessas orbitas como fazem os planetas.

Para determinar o período de revolução  $P$  de um satélite artificial em uma órbita a uma distância  $R$  do centro da Terra, podemos utilizar a terceira Lei de Kepler, que resulta na equação (2.96)

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (2.96)$$

## 2.5.8 Forças Gravitacionais

Corpos com simetria esférica agem como massas pontuais, para que as influências gravitacionais sejam facilmente calculadas. Na natureza, no entanto, os corpos na maioria

---

<sup>1</sup>Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ETC> Acesso em: 19 dez. 2024.

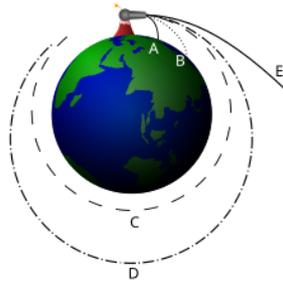


Figura 2.5: Ilustração das órbitas dos projéteis.  
 Fonte: Site: Wikimedia Commons [28].

das vezes não são perfeitamente esféricos [27]. Outra contribuição é proporcionada pelas forças gravitacionais diferenciais que os corpos vizinhos exercem uns nos outros. Essas forças diferenciais resultam em fenômenos como marés e precessão.

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{centro de massa}} + d\vec{F}.$$

A força gravitacional diferencial é a diferença entre as forças gravitacionais exercida em duas partículas vizinhas por um terceiro corpo, mais distante. Considerando partículas  $m_1$  e  $m_2$  há uma força diferencial entre elas devido a atração gravitacional de um corpo  $M$ .

A força diferencial  $\Delta\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$  tende a separar as duas partículas  $m_1$  e  $m_2$  pois, em relação ao centro de massa, as duas se afastam. Se as duas partículas são parte do mesmo corpo, a força diferencial tende a alongá-lo ou mesmo rompê-lo.

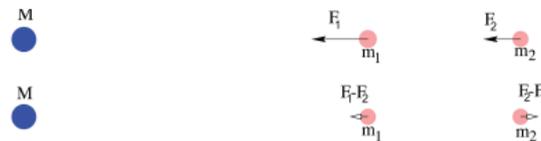


Figura 2.6: Ilustração de duas partículas  $m_1$  e  $m_2$  em relação ao centro de massa.  
 Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

Considerando duas partículas conforme a Figura 2.6, sendo  $R$  a distância entre elas e de  $r$  a distância de  $M$  à partícula  $m_2$ . O valor da força será

$$\Delta F = F_1 - F_2$$

As forças  $F_1$  e  $F_2$  são dadas por:

$$F_1 = \frac{GMm_1}{(r - R)^2}$$

e

$$F_2 = \frac{GMm_2}{r^2}$$

A diferença entre as forças  $F_1$  e  $F_2$  é dada por:

$$F_1 - F_2 = GM \left[ \frac{m_1}{(r - R)^2} - \frac{m_2}{r^2} \right].$$

Considerando  $m_1 = m_2 = m$

$$F_1 - F_2 = GMm \left[ \frac{r^2 - (r - R)^2}{r^2(r - R)^2} \right]$$

$$F_1 - F_2 = GMm \left( \frac{2rR - R^2}{r^4 - 2Rr^3 + r^2R^2} \right),$$

$$F_1 - F_2 = GMmR \left[ \frac{2r - R}{r^4 \left( 1 - \frac{2R}{r} + \frac{R^2}{r^2} \right)} \right].$$

Para  $r \gg R$ ,  $2r - R \approx 2r$  e  $\left( 1 - \frac{2R}{r} + \frac{R^2}{r^2} \right) \approx 1$ . Portanto, a expressão da força diferencial fica:

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3} R,$$

é possível chegar nesse resultado derivando a lei da gravitação universal [1]

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2GMm}{r^3}$$

que

$$\boxed{dF = \frac{2GMm}{r^3} dr}. \quad (2.97)$$

Essa é a equação da força diferencial  $dF$ , na qual  $dr$  é a separação entre os pontos para os quais se calcula a força diferencial.

## Marés

As marés terrestres constituem-se como um fenômeno decorrente da interação gravitacional entre a Lua e a Terra e, em menor escala, da interação gravitacional entre o Sol e a Terra [24].

A maré causada pela Lua deve-se ao fato de que a força gravitacional exercida por ela sobre cada ponto da superfície terrestre varia conforme a distância do ponto em relação à Lua [23]. Dessa maneira, a força gravitacional é mais intensa no lado da Terra mais próximo à Lua, menor no centro do planeta e ainda menor no lado oposto. Por conseguinte, em relação ao centro da Terra, o lado voltado para a Lua é atraído com mais intensidade, enquanto o lado oposto é atraído com menor intensidade. Devido à fluidez da água, essa diferença de forças resulta em dois "bojos" de água: um voltado para a Lua e outro no lado oposto [1], como mostra a Figura 2.7

Conforme a Terra realiza seu movimento de rotação, esses "bojos" permanecem aproximadamente alinhados com a Lua. Em determinado momento, um ponto da superfície da Terra situado abaixo da Lua experimenta a maré alta [22]. Após aproximadamente de seis horas, a rotação da Terra desloca esse ponto em uma posição a  $90^\circ$  em relação à

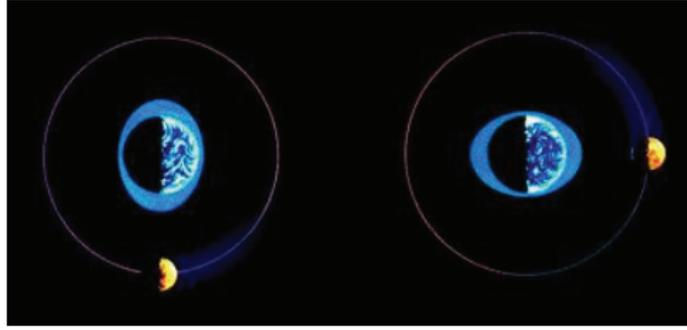


Figura 2.7: Representação das marés altas causadas pela gravidade devido a Lua orbitando a Terra.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

Lua, o que resulta em uma maré baixa. Depois de seis horas, o mesmo ponto estará a  $180^\circ$  da Lua, registrando novamente uma maré alta. Portanto, as marés ocorrem duas vezes ao longo de um período de 24 horas e 50 minutos, correspondente à duração do dia lunar [23] [24].

Se a superfície da Terra fosse totalmente coberta por água, a altura máxima das marés seria de aproximadamente 1 metro [23]. No entanto, a presença de massas continentais e sua distribuição irregular delas alteram significativamente o padrão das marés, o que resulta em variações de altura e horário conforme a localização geográfica. Em determinadas baías e estuários, as marés podem atingir alturas de até 10 metros [1].

### Força de marés

Considerando a atração gravitacional  $F_p$ , sentida por um corpo no ponto  $P$  na superfície da Terra, situado a uma distância  $r$  da Lua. Seja  $d$  a distância centro a centro entre a terra e a lua, e  $R$  o raio da Terra conforme a Figura 2.8

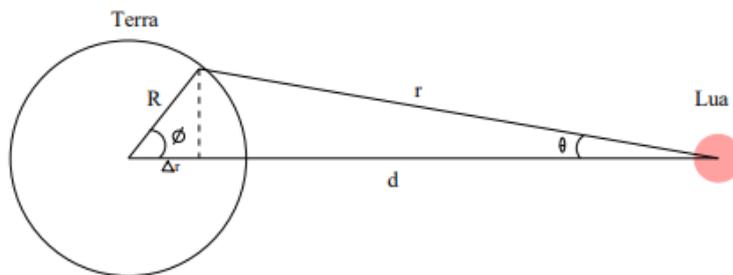


Figura 2.8: Representação da Terra à uma distância  $r$  da Lua.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

A força diferencial  $\Delta F$  no ponto  $P$  em relação ao centro da Terra é

$$\vec{\Delta F} = \vec{F}_P - \vec{F}_C$$

Como  $r$  é muito maior do que  $R$ , o ângulo  $\theta$  é muito pequeno e a direção da força  $\vec{F}_P$  é quase paralela à direção da força  $\vec{F}_C$ . Portanto pode dizer que

$$\Delta F = F_P - F_C$$

O valor  $\Delta F$  vale:

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3} \Delta r$$

Nessa equação,  $M$  é a massa do corpo que provoca a maré ( a Lua) e  $m$  a massa do corpo teste,  $r$  é a distancia entre  $M$  e  $m$ , e  $\Delta r$  é a variação nessa distância que é responsável pela diferença na força gravitacional exercida em diferentes pontos da superfície da Terra. Considerando que a força gravitacional média da Lua sobre a Terra está aplicada no centro de massa do planeta, a maior variação nessa força ocorre nos pontos localizados na Terra ao longo da linha que conecta os centros da Terra e da Lua [1].

Essa diferença de distância entre os pontos e o centro da Terra corresponde ao raio  $R$  do planeta. Assim, a máxima aceleração de maré na Terra, causada pela Lua, está diretamente relacionada a essa variação na distância:

$$\frac{\Delta F}{m} = \frac{2GM}{R^3} \Delta r. \quad (2.98)$$

Portanto, a força de maré em um corpo de raio  $R$ , provocada por um corpo de massa  $M$  à uma distância  $d$  é

$$\Delta F \propto \frac{M}{d^3} R$$

A força  $\Delta F$  pode ser decomposta em duas componentes: uma vertical em relação à superfície da Terra e outra horizontal. A componente vertical resulta em uma pequena variação no peso das massas no ponto onde a força da maré está sendo avaliada. A componente horizontal é a responsável por gerar o fenômeno das marés [1].

## Marés produzidas pela Lua e pelo Sol

Ao Comparar as marés produzidas pelo Sol e pela Lua em uma partícula de massa  $m$  situada na superfície da Terra, obtém-se

$$\frac{dF_{\odot}}{dF_L} = \frac{M_{\odot}}{M_L} \left( \frac{d_L}{d_{\odot}} \right)^3 = \frac{2 \times 10^{30} \text{ kg}}{7,35 \times 10^{22} \text{ kg}} \left( \frac{384\,000 \text{ km}}{149\,600\,000 \text{ km}} \right)^3 = 0,46.$$

Embora a massa do Sol seja significativamente maior que a da Lua, sua distância muito maior faz com que a maré provocada pelo Sol seja inferior a metade do efeito da maré provocada pela Lua [1]. No entanto, os efeitos das marés causados por ambos os astros se combinam vetorialmente, de forma que a intensidade da maré resultante depende da elongação da Lua.

Durante as fases de Lua nova e Lua cheia, as forças gravitacionais do Sol e da Lua se somam, o que resulta em marés mais altas durante a maré cheia e marés mais baixas durante a maré baixa, fenômeno conhecido como marés de sizígia ou marés vivas [23]. Nas fases de quarto crescente ou minguante da Lua, os efeitos das marés são atenuados, e as marés são chamadas de marés de quadratura ou marés mortas [24]. As marés estão representadas na Figura 2.9

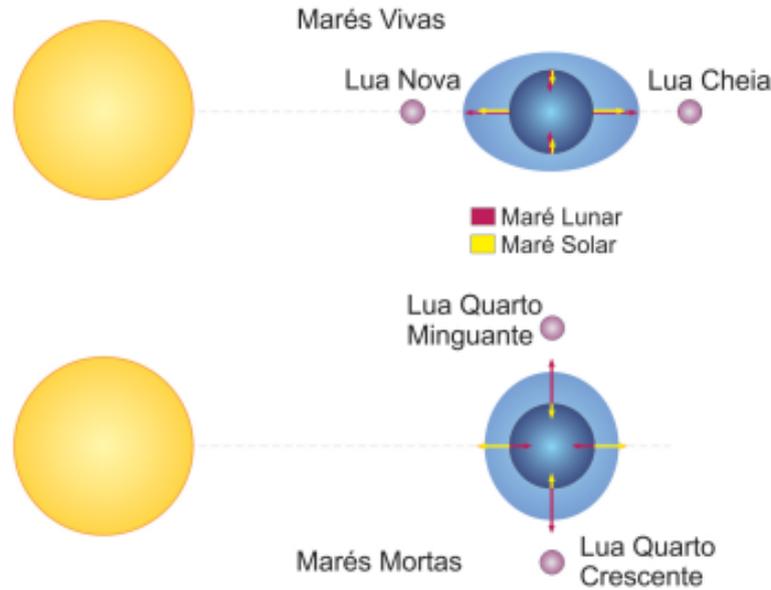


Figura 2.9: Representação das marés vivas e marés mortas.  
Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

### Limite de Roche

Uma consequência das forças de maré é que há uma distância mínima do centro do planeta que um satélite pode chegar sem se romper, conhecido como Limite de Roche (Nussenzweig, 2015)

Um satélite fluído, mantido por sua própria gravidade e com densidade média  $\rho_m$ , orbitando em torno de um planeta de densidade média  $\rho_M$  e raio  $R$ , teve sua distância mínima de órbita estável determinada por Edouard Roche, um astrônomo e matemático francês. Ele demonstrou que essa distância mínima é dada pela equação:

$$d = 2.44 \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R. \quad (2.99)$$

Caso o planeta e o satélite possuam densidades iguais, o limite de Roche é 2,44 vezes o raio do planeta [1].

Uma derivação simples do limite se obtém considerando duas partículas de massas  $m$  iguais e separadas somente por uma distância  $dr$ .

A força gravitacional entre as partículas é representada pela equação:

$$F_G = G \frac{mm}{(dr)^2}, \quad (2.100)$$

e a força da maré de um corpo de massa  $M$  e uma distância  $d$  sobre elas será

$$F_M = \frac{2GMm dr}{d^3}. \quad (2.101)$$

Para as duas partículas permanecerem juntas, a força gravitacional entre elas será

$$\frac{Gmm (dr)^2}{2} = \frac{2GMm dr}{d^3}, \quad (2.102)$$

sendo

$$d = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3} dr$$

em que

$$\rho_M = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad (2.103)$$

e

$$\rho_m = \frac{2m}{\frac{8}{3}\pi \left(\frac{dr}{2}\right)^3}. \quad (2.104)$$

Obtém-se o resultado:

$$d = (16)^{1/3} \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R = 2,51 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R. \quad (2.105)$$

O valor da constante numérica tornou-se 2,51 porque não levamos em consideração que as partículas formam um fluido [1].

O limite de estabilidade de Roche se aplica somente a satélites fluidos, sem tensões intrínsecas.

Em 1974, Hans R. Aggarwald e Vern R. Oberbeck estudaram o caso da ruptura por maré de corpos esferoidais sólidos, rochosos ou gelados, coesos por forças de tensão intrínsecas de seu material [1]. Encontraram que, para esses satélites com diâmetros maiores do que 40 km, a distância mínima que eles podem chegar de seu planeta sem quebrar é:

$$d = 1,38 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R$$

Para corpos externos que se aproximam de um planeta, a distância mínima de aproximação é reduzida. Naturalmente, satélites ou outros corpos impactantes podem ser destruídos por outras causas, como tensões aerodinâmicas. Assim, os limites reais de aproximação mínima, nos quais os corpos podem permanecer estáveis sob influência das forças de maré, dependem de fatores como o tamanho e as tensões internas dos corpos [1].

Segundo Oliveira filho e Saraiva [1], satélites sólidos, por exemplo, podem se aproximar mais do planeta do que satélites fluidos, a causa disso é que as forças de tensão interna das rochas que os compõem os mantêm estáveis. Corpos com dimensões inferiores a 40 km podem alcançar distâncias ainda menores do planeta sem sofrerem destruição devido às forças de maré, desde que sejam pequenos e suficientemente duros. Um exemplo, são os anéis de Saturno [1], que estão localizados dentro do limite de Roche do planeta, na qual implica que as partículas que constituem o anel possuem forças coesivas superiores às forças de maré.

Entretanto, à medida que o tamanho das partículas aumenta, as forças coesivas tornam-se menos significativas em comparação com as forças de maré, explicando o fato de que essas partículas não tenham se aglutinado para formar um satélite. Oliveira Filho e Saraiva (2014) [1] afirmam que os anéis de Saturno podem ser o resultado da destruição de um satélite ou cometa que se aproximou demais do planeta, sendo despedaçado pelas forças de maré.

## Precessão

Um outro efeito das forças diferenciais do Sol e da Lua na Terra é o movimento de precessão da Terra.

Segundo Nussenzweig (2015) [22], Newton calculou o efeito da rotação da Terra sobre sua forma. Somente sob efeito da gravidade, os planetas deveriam ter uma forma esférica, contudo, as forças centrífugas produzidas pela rotação levam a um achatamento nos polos e alargamento no equador, podendo ser definida como uma esféride oblato.

O plano do equador terrestre está inclinado aproximadamente de  $23^{\circ}26'$  em relação ao plano eclíptica, que por sua vez, apresenta uma inclinação de  $5^{\circ}8'$  em relação ao plano da órbita da Lua. Devido a essas inclinações, como descreve Oliveira e Saraiva [1], as forças diferenciais, não apenas tendem a achatá-la ainda mais, mas agem para endireitar seu eixo.

Como a Terra está em rotação, seu eixo não se alinha perfeitamente com o eixo da eclíptica, mas sofre um movimento de precessão em torno dele [27], podendo ser representado por um pião girando ao redor de seu eixo vertical em relação ao solo, conforme a Figura 2.10

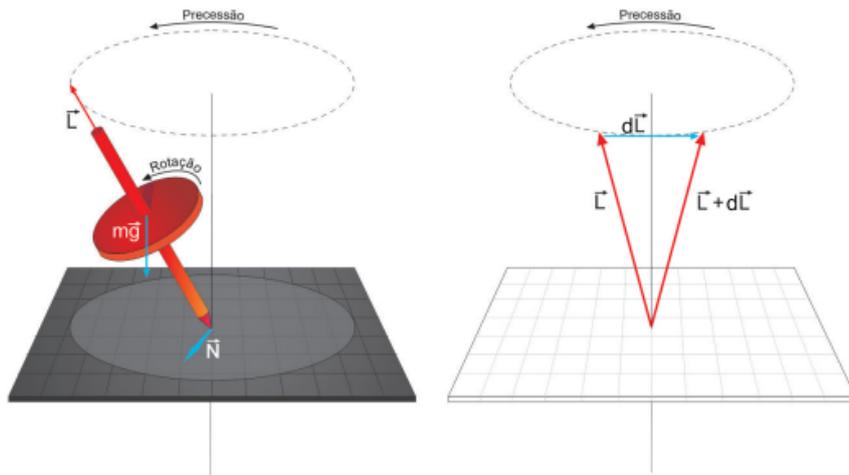


Figura 2.10: Representação do movimento de precessão.

Fonte: Oliveira Filho; Saraiva, 2014.

Em um pião, o seu peso gera um torque

$$\vec{N} = \vec{r} \times m\vec{g} \quad (2.106)$$

em que  $\vec{r}$  é o vetor posição do centro de massa do pião em relação ao ponto de contato com o solo, e  $m\vec{g}$  é a força peso. O torque é paralelo ao solo, perpendicular à força peso, e perpendicular ao momento angular de rotação do pião.

O torque é representado por

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.107)$$

em que varia o momento angular do pião. Essa variação pode ser representada pela mesma equação e com a mesma direção de  $\vec{N}$ . O torque não altera o módulo de  $\vec{L}$ , pois  $\vec{L}$  e  $\vec{N}$

são perpendiculares. Contudo, a sua direção é alterada, fazendo-o precessionar em torno do eixo perpendicular ao solo [1].

Na Terra, as forças diferenciais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica. No entanto, como esse torque é perpendicular ao momento angular de rotação da Terra, seu efeito é alterar a direção do eixo de rotação, sem modificar sua inclinação. Conseqüentemente, os polos celestes, nas quais são pontos que correspondem à projeção de polos geográficos [1], não ocupam uma posição fixa no céu. Existem dois polos celestes, o polo norte celeste e o polo sul celeste, como representado na Figura 2.11

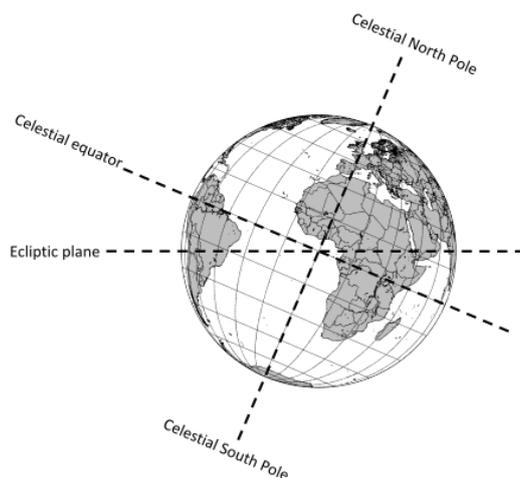


Figura 2.11: Representação dos polos celestes, o equador celeste e o plano eclíptico.  
Fonte: Site: Wikimedia Commons [29].

O Polo Celeste Norte foi identificado por Hiparco, no ano 129 a.C., ao comparar suas observações da posição de uma estrela Spica com as observações feitas por Timocharis de Alexandria. Timocharis havia medido que Spica estava a  $172^\circ$  do ponto vernal, enquanto hiparco mediu  $174^\circ$ . Ele concluiu que o ponto vernal havia deslocado 2 graus em 144 anos [1].

O movimento da Terra é chamado de precessão dos equinócios [22], pois devido ao movimento, os equinócios se deslocam ao longo da eclíptica no sentido do sol. O sol leva 20 minutos para se mover  $50''$  na eclíptica. Por causa disso, o ano tropical é medido em relação ao equinócios, e é 20 minutos mais curto do que o ano sideral, medido em relação às estrelas. É importante destacar que a precessão não tem nenhum efeito perceptível nas estações do ano, pois o eixo da Terra mantém sua inclinação de  $23,5^\circ$  em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele. No entanto, o movimento de precessão, embora extremamente lento, resulta em mudanças graduais nas constelações visíveis durante determinadas estações [1].

A precessão tem uma consequência importante, pois altera a ascensão reta e a declinação das estrelas, na qual implica que os astrônomos, ao apontarem os telescópios para o céu, devem corrigir as coordenadas das estrelas [1].

### 2.5.9 O valor da Constante G

A primeira medição do valor da constante gravitacional foi realizada por Henry Cavendish em 1798, utilizando um aparelho extremamente sensível, a balança de torção [12] [22].

Nesse experimento, um par de esferas de massa  $m$  foi colocado nas extremidades de uma barra, que era suspensa por uma fibra fina de quartzo conectada ao seu centro, mantendo-a em posição de equilíbrio [22].

Em seguida duas outras duas esferas de massa  $M$  foram posicionadas a mesma distância das esferas de massa  $m$ , gerando um torque devido às forças gravitacionais entre cada parte de esferas. Esse torque provocou o giro da barra em um ângulo  $\theta$ , na qual produziu uma torção correspondente na fibra. a fibra foi previamente calibrada para que fosse possível determinar o torque e as forças gravitacionais a partir do ângulo de torção, na qual foi medido de forma precisa utilizando um feixe de luz refletido por um pequeno espelho acoplado à fibra, formando uma alavanca óptica [22].

Cavendish obteve nesse experimento o valor  $G = 6,71 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ , que é próximo do valor atualmente aceito  $G = 6,6739 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$  [1], ele chamou a sua experiência de "pesagem da Terra" [12].

### 2.5.10 Validade Além do Sistema Solar

A validade da gravitação universal pode ser testada fora dos limites do sistema Solar, possibilidade viabilizada pelas observações de William Herschel e seu filho John [22]. Eles identificaram que as chamadas estrelas fixas não eram realmente estáticas, constatando diversos movimentos estelares. Em particular, observaram que o Sol se desloca em direção a um ponto na constelação de Hércules, com uma velocidade comparável à da órbita da Terra [1].

Além disso, os Herschel descobriram inúmeras estrelas duplas, na qual são sistemas formados por pares de estrelas que orbitam em torno uma da outra. Um exemplo é o sistema de Sirius composto por Sirius A, a estrela mais visível e sua companheira menos luminosa, Sirius B, descoberta em 1862 [12] [22] [1].

A órbita de Sirius B em torno de Sirius A configura uma elipse kepleriana, com um período de 50 anos. Sua órbita está representada na Figura 2.12.

Considerando que Sirius esteja a uma distância aproximada de 8,7 anos-luz da Terra, mesmo com essa grande distância a Lei da Gravitação Universal permanece válida nessa escala. [1].

Em escalas maiores, observações revelam que aglomerados de estrelas e galáxias também se mantêm unidos pela gravitação. O "Grupo Local", que inclui a Via Láctea, abriga cerca de vinte galáxias, como Andrômeda e as Nuvens de Magalhães. Aglomerados ainda maiores, contendo até  $10^5$  galáxias, foram detectados a distâncias da ordem de  $10^9$  anos-luz, o que equivale a aproximadamente um décimo do raio do Universo observável. Tais observações corroboraram a hipótese de Newton, evidenciando que a Lei da gravitação é de fato Universal [22].

## 2.6 Críticas e Limitações da Teoria Newtoniana

O *Principia*, foi um dos feitos mais impressionantes da história da ciência. A obra de Newton revolucionou o entendimento do Universo ao introduzir a lei da Gravitação Universal, fornecendo uma explicação elegante e coesa para os movimentos dos corpos

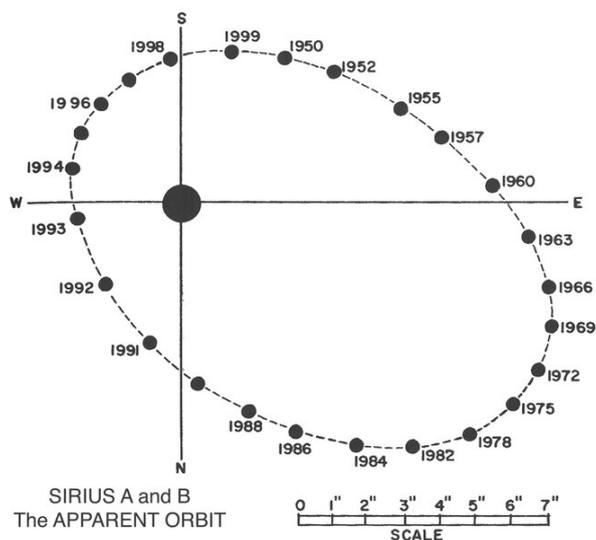


Figura 2.12: Representação da órbita de Sirius A e Sirius B.  
 Fonte: Observatório de Raios X Chandra [30].

celestes. A partir de sua teoria, foram desenvolvidas diversas equações, como a equação da energia e sua relação com as órbitas, que demonstram a profundidade e a beleza da teoria newtoniana. Seu trabalho estabeleceu as bases para o desenvolvimento das áreas do conhecimento, refletindo sua importância duradoura na Ciência.

Entretanto, apesar da magnitude, a obra de Newton não escapou de críticas, e o consenso geral era de que faltava algo [12].

Entre as críticas, Christiaan Huygens, influente filósofo natural, não concordava com os cálculos de Newton. Em seu tratado de 1690, *Discurso sobre a Causa da Gravidade*, escreveu:

A Saber, que todas as pequenas partes que podemos imaginar em dois ou mais corpos diferentes se atraem mutuamente ou tendem a se aproximar uma da outra. Isso eu não poderia aceitar, porque acredito ver claramente que a causa de tal atração não é explicável nem por qualquer princípio da Mecânica nem pelas leis de movimento. (Panek, p. 69, 2019).

Leibniz também concordava, afirmando que os filósofos modernos haviam negado a operação natural e imediata de um corpo sobre outro à distância, e que ele mesmo compartilhava dessa opinião.

Newton, por sua vez, concordava com seus críticos no ponto de que o que faz a matéria desviar de um movimento inercial em linha reta não pode ser alguma interação misteriosa com outra matéria que não envolva contato físico [2].

Quando Newton unificou os movimentos terrestres e celestes, ele se deu a oportunidade de não precisar especificar uma causa para a gravitação. Seus críticos, por outro lado, consideraram que ele deveria ter uma explicação mais detalhada e Newton realmente tinha especulações sobre a origem da gravidade, mas abordava o tema de forma teológica em seus manuscritos não publicados. Ele acreditava que a gravidade era uma ação direta de Deus sobre o Universo, uma intervenção que mantinha a ordem e a harmonia dos cosmos [31]. Contudo, no que se refere aos estudos publicados, Newton apenas nomeou como gravitação e não precisava atribuir uma causa a ela [2].

Apesar do sucesso da teoria newtoniana na descrição de fenômenos gravitacionais em escalas terrestres e astronômicas, a teoria de Newton apresentou limitações que se tornaram evidentes ao longo dos séculos.

A gravitação de Newton não consegue descrever situações em que os campos gravitacionais são extremamente intensos, como nas proximidades de buracos negros ou estrelas de nêutrons. Um exemplo é a precessão anômala do periélio de Mercúrio [12].

Outro ponto importante é que a mecânica newtoniana baseia-se na ideia de espaço e tempo absolutos e independentes, ou seja, o espaço era um cenário "fixo" onde os eventos ocorreria independentemente dos corpos presentes, e o tempo fluía de maneira uniforme para todos os observadores. Essa ideia funcionava bem no cotidiano, mas a teoria não poderia explicar fenômenos em altas velocidades. Essas limitações deram espaço para o desenvolvimento de novas teorias, como a Relatividade Geral [12].

# Capítulo 3

## A Teoria da Relatividade Geral

Após discutir sobre a teoria da gravitação de Newton e suas limitações, este capítulo aborda a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que representou um aprimoramento significativo. Foram apresentados os fundamentos matemáticos essenciais para o desenvolvimento da teoria, culminando nas equações de campo de Einstein e suas aplicações.

### 3.1 Introdução à TRG

Em 1915, Albert Einstein revolucionou a compreensão da gravitação com a proposta da Teoria da Relatividade Geral (TRG), desenvolvida para unificar a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) com a teoria newtoniana [2] [5]. Ao contrário de Newton, que tratava a gravidade como uma força misteriosa entre massas, Einstein reformulou o fenômeno como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, moldada pela presença de massa e energia [32] [18]. Nesse novo entendimento, espaço e tempo deixam de ser absolutos, tornando-se flexíveis e influenciados pela matéria.

A formulação da TRG fundamenta-se em dois princípios essenciais: o Princípio de Equivalência e o Princípio da Covariância [33]. O primeiro forneceu a base conceitual inicial ao demonstrar que a gravidade poderia ser entendida como uma consequência da geometria do espaço-tempo. O segundo princípio garantiu a universalidade das leis físicas, eliminando referenciais privilegiados na descrição dos fenômenos e estabelecendo a matemática necessária.

Compreender esses princípios é indispensável para estudar a TRG. Eles não apenas sustentam a transição da visão clássica para a relativística, mas também fornecem bases conceituais e matemáticas que definem a estrutura da teoria. Dessa forma, serão apresentados nas seções seguintes.

### 3.2 Princípio de Equivalência

O Princípio da Equivalência pode ser resumido em três pontos [13] [33]:

- a massa inercial e massa gravitacional são iguais a menos de um fator de escala;
- forças gravitacionais e forças inerciais são localmente equivalentes;
- um referencial sob ação da gravidade é localmente inercial e nele valem as conhecidas leis da Teoria da Relatividade Restrita.

Para descrever melhor o princípio de equivalência será utilizado o experimento mental conhecido como *elevador de Einstein* [32].

Supondo um cenário em que um indivíduo  $A$  esteja dentro de uma nave espacial com uma aceleração  $\vec{g}$ , enquanto outro indivíduo  $B$  se encontra em um elevador parado na superfície da Terra, sob a influência da força gravitacional  $\vec{g}$ , conforme a Figura 3.1 e a Figura 3.2. Ambos os indivíduos estão completamente isolados do ambiente externo, sem acesso a informações visuais que permita identificar a natureza do movimento externo [19] [2].

Ao realizarem experimentos dentro de seus respectivos sistemas,  $A$  e  $B$  observam fenômenos idênticos. Por exemplo, ao soltarem um objeto de suas mãos, ambos percebem que o objeto cai em direção ao chão com a mesma aceleração relativa ao solo do sistema. Nesse contexto, torna-se impossível distinguir se o sistema está sendo acelerado uniformemente ou se está em repouso em um campo gravitacional [19] [32].

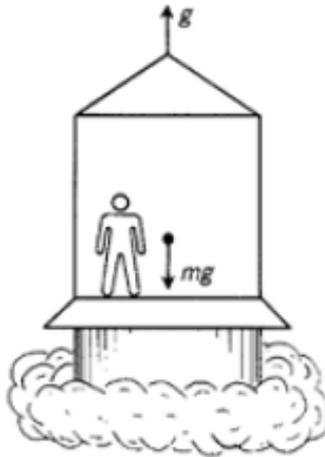


Figura 3.1: Ilustração do elevador de Einstein que representa o indivíduo  $A$  em uma nave sob aceleração  $\vec{g}$ .

Fonte: Natario, 2011 [34].

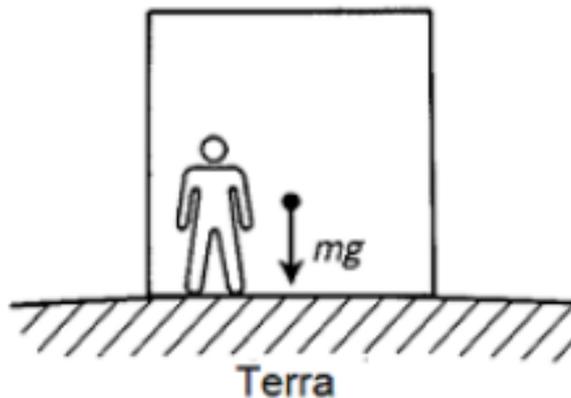


Figura 3.2: Representação do indivíduo  $B$  no elevador situado na Terra sob influência de uma força gravitacional  $\vec{g}$ .

Fonte: Natario, 2011 [34].

Esse princípio ilustra a equivalência entre os efeitos da aceleração e da gravidade em

sistemas locais e estabelece a relação entre a massa inercial e a massa gravitacional [12] [13]. Einstein concluiu que, embora conceitualmente distintas, essas duas massas são equivalentes.

Neste experimento foi considerado uma área limitada, na qual os efeitos gravitacionais não variam de forma significativa, permitindo tratá-los como se fossem os mesmos em toda a região, ou seja, assume-se que o campo gravitacional seja uniforme. Contudo, na realidade, os campos gravitacionais originados por massas e energias não são uniformes; eles possuem uma natureza "radial", o que significa que os efeitos da gravidade variam dependendo da posição em relação à fonte gravitacional. Isso implica que as "linhas de força" se aproximam da fonte e convergem em direção a ela, "atraindo" os corpos para a massa central. Essa característica dá origem ao *desvio geodésico*. O termo geodésico é a trajetória mais curta que um corpo segue no espaço-tempo. Quando um objeto se move sob a influência de um campo gravitacional, sua trajetória é desviada devido à curvatura do espaço-tempo não uniforme ao redor de um corpo, resultando no desvio geodésico. Além disso, essa variação da gravidade com a distância da fonte, explica as forças de maré. A parte de um corpo mais próximo da fonte gravitacional sofre uma força gravitacional maior que a parte mais distante. A diferença de forças entre essas regiões gera as forças de marés, deformando o objeto.

Dessa forma, a Relatividade Geral fornece a teoria para descrever os corpos em campos gravitacionais utilizando o conceito de referenciais inerciais, que, na teoria de Einstein, são referenciais locais. Essas regiões são suficientemente pequenas para que o efeito da curvatura do espaço-tempo pode ser desprezada e os corpos se movem de acordo com as geodésicas do espaço-tempo.

### 3.3 Princípio da Covariância

Para a Relatividade Geral, é necessário um conjunto matemático distinto para descrever os fenômenos físicos em um espaço-tempo curvado. Segundo o princípio de covariância [13], as leis da física devem ser válidas para qualquer referencial adotado [32]. Para isso, utilizam-se os tensores, que são definidos de acordo como suas componentes se transformam sob mudanças de coordenadas [33]. Essa característica garante que os tensores sejam independentes do sistema de coordenadas escolhido, tornando-os invariantes e adequados para descrever os fenômenos em um espaço-tempo curvado. Os tensores são classificados de acordo com suas ordens:

Ordem 0: Representa uma quantidade que não depende de coordenadas (escalar), como a temperatura, sendo um único valor numérico.

Ordem 1: Representa uma grandeza com magnitude e direção (vetor), como a velocidade, cujas componentes dependem do sistema de coordenadas.

Ordem 2: Pode ser representado por uma matriz, descrevendo relações mais complexas, como a métrica do espaço-tempo.

Ordens superiores: Possuem índices maiores que 2, sendo mais complexos, utilizados para descrever, por exemplo, a curvatura do espaço-tempo.

Compreender os tensores na Relatividade Geral é extremamente importante, pois fornecem uma descrição abrangente para lidar com a complexidade das interações gravitacionais e da geometria do espaço-tempo. Os tensores também asseguram o princípio da covariância, garantindo que as leis da física sejam aplicáveis em todos os referenciais.

A partir disso, podemos considerar um espaço tridimensional que possui variáveis independentes, no qual as coordenadas são representadas como  $x^\mu$  com  $\mu = 1, 2, 3$ , correspon-

dendo as dimensões em um plano cartesiano  $x, y, z$ . Uma transformação de coordenadas pode ser aplicada no conjunto  $x^\mu$  para um novo conjunto  $x'^\mu$ , onde  $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$ , em que  $n$  representa o número de dimensões do espaço considerado. Na TRG considera-se  $n = 4$  na qual  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , em que 0 corresponde a  $t$ .

Um exemplo de transformação ocorre no caso de um deslocamento infinitesimal  $dx^\mu$  no sistema original  $x^\mu$ :

$$dx^\mu, \mu = 1, 2, 3, \dots, n.$$

que pode ser derivado no sistema transformado  $x'^\mu$  [13] como:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (3.1)$$

que descreve como um deslocamento infinitesimal em um referencial de coordenadas novo  $x'^\mu$  é relacionado ao deslocamento em um referencial de coordenadas antigo  $x^\nu$ . A derivada parcial que aparece é a matriz de transformação que permite preservar a consistência das grandezas físicas sob mudanças de coordenadas.

Há um somatório implícito em  $\nu$ , contudo neste trabalho será utilizado a notação de Einstein, que o somatório pode ser implícito quando há índices repetidos.

O mesmo princípio de transformação se aplica a vetores [35] que pode ser representado como

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (3.2)$$

em que  $V^\mu$  representa um vetor contravariante no sistema de coordenadas original  $x^\mu$ . Um vetor contravariante é utilizado para descrever grandezas como deslocamento, velocidade, que dependem do referencial [13]. A regra de transformação garante que essas grandezas sejam consistentes e descritas em diferentes sistemas de coordenadas. Por exemplo um deslocamento no espaço-tempo, ao aplicar a mudança para um referencial curvado, as componentes que eram (x,y) desse vetor se ajustam e o deslocamento real no espaço-tempo permanece o mesmo.

Para um vetor covariante  $V_\mu$ , a transformação segue a regra do covariante, sendo uma transformação inversa à dos vetores contravariantes:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu. \quad (3.3)$$

Os vetores covariantes são utilizados para descrever quantidades como gradientes e forças. Eles medem a taxa de variação e uma função escalar e estão associados ao espaço dual dos vetores contravariantes [13].

Os vetores contravariantes e os covariantes também se diferem nos índices. Covariante possui índice subscrito  $V_\mu$  e contravariante possui índice sobrescrito  $V^\mu$ . Esses vetores são tensores de ordem 1

### 3.3.1 Tensor de ordem superior

Um tensor é a combinação de dois vetores. Seja um vetor  $A_\mu$  e outro vetor  $B_\nu$ , seu produto tensorial é um tensor de segunda ordem  $T_{\mu\nu}$ , definido por:

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu. \quad (3.4)$$

Como um vetor pode ser escrito pela equação (3.3), podemos substituir essa relação no tensor:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T_{\alpha\beta}, \quad (3.5)$$

sendo a Lei de transformação em que os tensores covariantes de ordem superior são definidos por ele [35]. Para os tensores contravariantes, a equação é definida como

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Existem também tensores mistos que possuem componentes com índices covariantes e contravariantes [36] representado por

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\beta}_{\alpha}. \quad (3.7)$$

Os tensores mistos permite que sejam usados em situações em que propriedades precisam ser descritas de maneira compatível com diferentes transformações de coordenadas, como a relação entre vetores e formas lineares no espaço-tempo curvo [33] [13].

Uma propriedade dos tensores é chamada de contração, uma maneira de se obter uma quantidade escalar a partir de um tensor. Quando um tensor é "contraído" acontece uma redução de sua ordem, como por exemplo, um tensor de ordem 2 se reduz a um escalar, o que pode fornecer informações sobre as propriedades físicas de sistemas [35]. Considerando um tensor  $T^{\mu\lambda\nu}_{\lambda\omega}$  (3,2) a sua contração acontece nos índices  $\lambda$  por meio do produto interno em que o delta de Kronecker aparece, se os índices são iguais, seu valor é 1, caso contrário é igual a 0:

$$T^{\mu\nu}_{\omega} = A^{\mu\lambda} B^{\nu}_{\lambda\omega}, \quad (3.8)$$

a contração resulta em um tensor do tipo (2,1) [36].

Outra propriedade dos tensores são as de simetria e antissimetria. Um tensor é dito simétrico se a troca de dois índices não altera o valor do tensor [33]. Em termos matemáticos:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (3.9)$$

Um tensor é considerado antissimétrico em seus índices se a troca altera o sinal do tensor:

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}. \quad (3.10)$$

## 3.4 Tensor Métrico

O tensor métrico descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo, incluindo distâncias e ângulos entre eventos sendo fundamental na teoria da Relatividade Geral [13]. De acordo com Weinberg (1972) [13], o tensor métrico é um tensor de ordem (0,2) que possui dois índices covariantes e pode ser denotado por  $g_{\mu\nu}$ . Para compreender o papel do tensor métrico na geometria do espaço-tempo, é interessante analisar o teorema de pitágoras na geometria euclidiana [35]. O comprimento infinitesimal de uma linha reta entre dois pontos pode ser expresso como

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \quad (3.11)$$

que podemos escrever para um espaço de várias dimensões como uma soma sobre todas as direções:

$$ds^2 = \sum_{i,j} dx^i dx^j. \quad (3.12)$$

em que  $i$  e  $j$  percorrem todas as dimensões espaciais. Para a simplificação podemos adicionar o Delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ :

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.13)$$

Ao considerar uma mudança de coordenadas, a equação pode ser expressa como

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^r dx'^k. \quad (3.14)$$

O tensor métrico pode ser definido como:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}. \quad (3.15)$$

Na geometria euclidiana a delta de kronecker é suficiente para descrever o comprimento, contudo, em espaços curvos é necessário incluir um tensor que corrija este cálculo [33], resultando no tensor métrico que pode ser representado como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.16)$$

Este espaço possui a propriedade de conexão com os componentes covariantes e contravariantes [13]:

$$g_{\mu\nu} V^\nu = V_\mu \quad (3.17)$$

e

$$g^{\mu\nu} V_\nu = V^\mu. \quad (3.18)$$

Que podemos definir um tensor contravariante  $g^{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda. \quad (3.19)$$

## 3.5 Cálculo Tensorial

Para generalizar vetores e tensores para espaços curvos, é necessário adaptar conceitos do cálculo em espaços planos, introduzindo ferramentas apropriadas para preservar as propriedades tensoriais em transformações de coordenadas [33]. Nesse contexto, os símbolos de Christoffel desempenham um papel fundamental [13].

No cálculo em variedades curvas, a derivada de um tensor, não resulta em outro tensor necessariamente. Isso ocorre devido à dependência explícita das derivadas de coordenadas em espaços curvos. Por exemplo [33], a transformação:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\omega} \bar{T}^{\lambda\omega} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\omega} \bar{T}^{\lambda\omega} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\omega} \frac{\partial \bar{T}^{\lambda\omega}}{\partial \bar{x}^\alpha} \right). \quad (3.20)$$

Para restaurar o caráter tensorial, introduzimos os símbolos de Christoffel que são definidos em termos do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ :

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (3.21)$$

na qual representa de primeira ordem,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho\mu\nu} \quad (3.22)$$

de segunda ordem. Note que os símbolos de Christoffel não são considerados tensores pela dependência da escolha de coordenadas, sendo um termo de correção [13] [33].

### 3.5.1 Derivada Covariante

Ao considerar as derivadas parciais, que, embora sejam bem definidas em espaços planos com coordenadas inerciais, não são apropriadas para quantidades tensoriais em espaços curvos [33]. Ao contrário dos tensores, não se transformam de maneira adequada sob transformações de coordenadas. Isso implica a necessidade de uma nova definição, a derivada covariante, que seja consistente com a geometria curvada do espaço-tempo [19].

A derivada covariante é um operador que generaliza a derivada parcial para espaços curvos, garantindo que a operação respeite as propriedades de transformação de tensores em coordenadas arbitrárias, ela inclui correções que dependem da curvatura e das conexões associadas à métrica [33]. Ela segue as seguintes propriedades [33]:

**Linearidade:**

$$\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$$

**Regra do Produto de Leibniz:** Sejam  $A^\mu$  e  $B_\nu$ :

$$\nabla_\rho(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\rho A^\mu) B_\nu + A^\mu (\nabla_\rho B_\nu). \quad (3.23)$$

Para calcular a derivada covariante, é necessário calcular a derivada parcial e, em seguida, aplicar uma correção para tornar o resultado covariante [33].

Definindo as derivadas covariantes para tensores contravariantes e covariantes:

$$\nabla_\rho T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu T^{\mu\lambda}, \quad (3.24)$$

e

$$\nabla_\rho T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda T_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda T_{\mu\lambda}. \quad (3.25)$$

Outra propriedade é que a derivada do tensor métrico é sempre nula [36]

$$\begin{aligned} \nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\mu\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\nu\rho\mu} - \Gamma_{\mu\rho\nu} \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Essa propriedade é essencial para garantir a preservação do intervalo métrico ao longo de uma curva.

Agora, supondo uma curva parametrizada  $x^\mu = x^\mu(u)$  por  $u$ , define-se a derivada absoluta para tensores contravariantes e covariantes, respectivamente [36]

$$\frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta u} = \nabla_\rho T^{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial u} \quad (3.27)$$

$$\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta u} = \nabla_\rho T_{\mu\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial u}. \quad (3.28)$$

Os símbolos de Christoffel são nulos em espaços planos. Consequentemente, as derivadas covariante e absolutas reduzem-se às derivadas usuais do cálculo diferencial.

### 3.5.2 Transporte Paralelo e Geodésicas

"A gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, e essa curvatura se manifesta na divergência de uma geodésica em relação a uma geodésica próxima" (Misner, Thorne, Wheeler, 2017) [32].

Na teoria da relatividade geral, a gravidade não é mais vista como uma força convencional, mas como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Em um espaço curvado, as trajetórias não seguem linhas retas como fariam em um espaço plano, são trajetórias geodésicas, linhas mais "retas" possíveis em um espaço curvado [13] [33].

A frase "divergência de uma geodésica em relação a uma geodésica próxima" quer dizer que duas partículas próximas que seguem trajetórias geodésicas no espaço-tempo, podem se afastar ou se aproximar conforme se movem devido a curvatura do espaço-tempo [32].

O conceito de geodésica surgiu a partir da introdução da derivada covariante e do transporte paralelo. Nesse contexto, a derivada covariante permite quantificar a taxa de variação instantânea de um campo tensorial, comparando-o com o que o tensor seria se fosse mantido constante ao longo de uma trajetória, ou seja, "transportado paralelamente" [33].

Em um espaço plano, é possível mover um vetor de um ponto para outro mantendo-o constante, e, ao ser transportado, pode-se realizar operações permitidas em um espaço vetorial. Esse conceito de mover um vetor ao longo de um caminho mantendo-o constante é denominado transporte paralelo [33] [32], na qual pode ser generalizado para um espaço curvado (Figura 3.3) para um tensor de qualquer ordem. Para os cálculos a seguir será utilizado a referência [33].

Seja uma curva  $x^\mu(\lambda)$ , para um tensor  $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$  ao longo dessa curva exige que as componentes sejam constantes:

$$\frac{d}{d\lambda} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = 0. \quad (3.29)$$

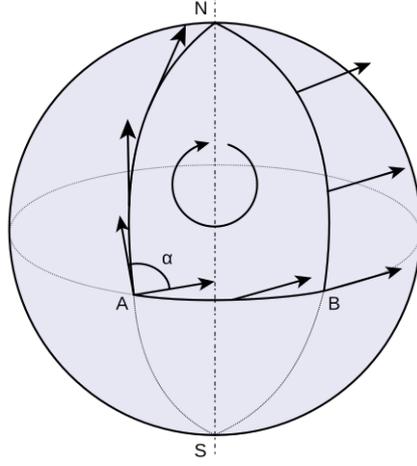


Figura 3.3: Representação do Transporte Paralelo em uma esfera.  
 Fonte: Site: Wikimedia Commons [37].

Podemos substituir a derivada parcial por uma derivada covariante direcional que pode ser representada como:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (3.30)$$

Essa equação é um mapeamento de tensores  $(k, l)$  para tensores  $(k, l)$ . Podemos definir o transporte paralelo do tensor  $T$ , com a condição que a derivada covariante de  $T$  se anule:

$$\left( \frac{D}{d\lambda} T \right)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = 0. \quad (3.31)$$

Essa equação é conhecida como a equação de transporte paralelo [33]. Para um vetor ela é representada como:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0. \quad (3.32)$$

Considerando um tensor em um ponto ao longo do caminho, existe uma continuação única desse tensor para outros pontos do caminho, desde que satisfaça a equação (3.31). Se a conexão for compatível com a métrica, esta será sempre transportada paralelamente em relação à conexão, então temos:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.33)$$

Com o transporte paralelo bem definido, podemos definir agora uma geodésica como uma curva ao longo da qual o vetor tangente é transportado paralelamente. Podemos definir um vetor  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$  a um caminho  $x^\mu$ , em que a condição para ser transportado paralelamente é:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (3.34)$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0.} \quad (3.35)$$

Essa é a equação da geodésica que reproduz a noção usual de linhas retas se os coeficientes de conexão forem os símbolos de Christoffel no espaço euclidiano [13]. A equação da geodésica descreve o movimento da luz na relatividade geral.

### 3.5.3 Tensor de Riemann

Com a introdução das derivadas covariantes e do transporte paralelo, é possível enunciar o tensor de Riemann, uma ferramenta matemática fundamental para descrever a curvatura do espaço-tempo. Sua introdução é essencial para formalizar e quantificar como o espaço-tempo é distorcido na presença de massa e energia. O tensor de Riemann encapsula todas as informações sobre a curvatura do espaço-tempo em torno de cada ponto, generalizando o conceito para quatro dimensões ou mais. Ele é utilizado nas equações de campo de Einstein, que serão apresentadas neste trabalho por meio do Tensor de Einstein. Além disso, o tensor de Riemann permite identificar regiões onde o espaço-tempo possui singularidades, como nos buracos negros.

Para introduzir o Tensor de Riemann, começamos analisando o conceito de transporte paralelo. Considere dois vetores  $A^\mu$  e  $B^\nu$ . Suponha que um vetor  $V$  seja transportado paralelamente na direção de  $A^\mu$  e, em seguida, na direção de  $B^\nu$  e retrocede ao longo dos vetores, retornando ao ponto de partida.

Ao retornar ao ponto inicial, em um espaço curvo, o vetor  $V$  pode não coincidir com sua orientação original. Essa discrepância resulta diretamente da curvatura do espaço-tempo. Como o transporte paralelo é independente do sistema de coordenadas escolhido, deve existir um tensor que descreva como o vetor se altera ao retornar ao ponto inicial [33]. Esse tensor é o de Riemann.

Portanto, a equação que descreve a alteração do vetor transportado paralelamente é representado como

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu, \quad (3.36)$$

onde  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  é o tensor de Riemann (tensor de curvatura), antissimétrico nos dois últimos índices:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}. \quad (3.37)$$

Agora, devemos utilizar o comutador de duas derivadas covariantes. Considerando um campo vetorial  $V$ :

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho, \end{aligned} \quad (3.38)$$

o tensor de Riemann é definido como

$$\boxed{R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.} \quad (3.39)$$

### Propriedades do tensor de Riemann

O tensor de Riemann possui várias propriedades matemáticas que são importantes para entender a curvatura do espaço-tempo.

Para que um espaço seja plano, o tensor de Riemann tem que ser igual a zero. Ou seja, a curvatura do espaço é nula se e somente se o tensor de Riemann [33]:

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\sigma} = 0. \quad (3.40)$$

O teorema também se aplica ao tensor de Riemann covariante. O tensor de Riemann é antissimétrico nos dois últimos índices  $\mu\nu$ , o que significa que trocar esses índices resulta em um sinal oposto [19]. Além disso, o tensor de Riemann possui uma simetria cíclica nos subíndices:

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\sigma} + R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma} + R_{\nu\lambda\mu}^{\sigma} = 0. \quad (3.41)$$

Podemos introduzir outros tensores, como o tensor de Ricci, definido pela contração [35]

$$R_{\lambda\nu} = R_{\lambda\sigma\nu}^{\sigma}, \quad (3.42)$$

e o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

O tensor de Einstein é definido a partir da identidade de Bianchi, uma identidade fundamental para a geometria, sendo uma consequência da simetria do tensor de Riemann [33]:

$$\nabla_{\rho} R_{\lambda\mu\nu}^{\sigma} + \nabla_{\mu} R_{\lambda\rho\nu}^{\sigma} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\rho\mu}^{\sigma} = 0 \quad (3.44)$$

que obtém-se a identidade:

$$\nabla_{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (3.45)$$

sendo,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

o tensor de Einstein, simétrico e possui derivada covariante nula [33] [13].

Essas propriedades são diretamente aplicadas nas equações de campo de Einstein.

## 3.6 Equação de Campo

Agora que a matemática da Relatividade Geral foi introduzida, chegamos às equações de campo de Einstein. O estudo de campos gravitacionais é essencial para a compreensão da interação fundamental que molda a estrutura do Universo. As equações de Einstein permitem prever e calcular como a matéria e a energia afetam a geometria do espaço-tempo. Elas são a base para diversas previsões, como a expansão do Universo, e possuem aplicações práticas, como os sistemas de navegação por satélites (GPS), que serão abordados neste trabalho, além de fornecerem um caminho para novas descobertas.

Como foi visto anteriormente, a gravidade descrita por Isaac Newton como uma força de atração entre massas, era considerada um campo escalar que permeia todo o espaço [13]. Nesse modelo, a aceleração de um corpo em um potencial gravitacional  $\Phi$  é representada pela equação

$$a = -\nabla\Phi, \quad (3.47)$$

e a equação diferencial de Poisson para o potencial em termos da densidade de matéria  $\rho$ :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (3.48)$$

Faremos uma generalização relativística que deve assumir a forma de uma equação de tensores. O potencial gravitacional deve ser substituído por um tensor métrico que não deve conter nenhuma derivada de ordem superior a dois [33]. Portanto,  $T_{\mu\nu}$  será contemplado pelo tensor de Einstein [35]:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (3.49)$$

onde representa a relação entre o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  e o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , onde  $\chi$  é um fator de proporcionalidade.

Substituindo o tensor de Einstein na equação acima

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \quad (3.50)$$

isolando-se o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , obtém-se

$$R_{\mu\nu} = \chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (3.51)$$

Para determinar o valor da constante  $\chi$ , é preciso reduzir a equação (3.51) na forma da equação de Poisson no limite não relativístico tomando o movimento de uma partícula descrita por

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (3.52)$$

sendo uma equação da geodésica. No caso não relativístico é desprezado o termo de segunda ordem da velocidade, então a equação é definida como

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma_{00}^k \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx^0}{dt} \right)^2 \quad (3.53)$$

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma_{00}^k \left( \frac{dx^0}{dt} \right)^2 \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -c^2\Gamma_{00}^k. \quad (3.55)$$

Consideraremos uma aproximação para campos fracos, em que a métrica é expressa como a soma da métrica de Minkowski e um termo infinitesimal,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . Podemos desconsiderar termos de ordem igual ou a superior  $h^2$ , pois  $h_{\mu\nu}$  é muito pequeno. Supondo que a derivada em relação ao tempo seja nula, podemos determinar as expressões a partir do símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2}g^{km}(-\partial_m g_{00}) = \frac{1}{2}\partial_k h_{00}. \quad (3.56)$$

Na qual pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} c. \quad (3.57)$$

Podemos compará-la com a equação de movimento de Newton expressa como

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (3.58)$$

que resulta no termo  $h_{00}$ :

$$h_{00} = \frac{2}{c^2} \phi. \quad (3.59)$$

Para velocidades muito menores que a velocidade da luz, o termo principal do tensor de momento-energia é  $T_{00} = \rho c^2$  em que o traço do tensor é  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} T_{00} \approx \eta^{00} T_{00} = \rho c^2$ . Fazendo a aproximação para a métrica de Minkowski a partir da equação (3.51), temos

$$R_{00} = \frac{1}{2} \chi \rho c^2. \quad (3.60)$$

Utilizando o tensor de Riemann e desprezando as derivadas temporais e os termos  $\Gamma^2$ :

$$R_{00} = \partial_k \Gamma_{00}^k, \quad (3.61)$$

Comparando com a equação e substituindo  $h_{00}$  obtém-se

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi. \quad (3.62)$$

que pode ser escrita como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{2} \chi \rho c^4, \quad (3.63)$$

que comparando com a equação, temos o valor da constante:

$$\chi = \frac{8\phi G}{c^4}. \quad (3.64)$$

Finalmente podemos substituir  $X$  para escrever as equações de Einstein na forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.65)$$

que pode ser reescrita como

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.} \quad (3.66)$$

Como as equações de campo não são lineares, é difícil obter uma solução exata, mas o astrônomo Karl Schwarzschild conseguiu obter uma solução para as equações de Einstein em 1916, em um campo estático e com simetria esférica, comprovando que a gravidade é uma curvatura do espaço-tempo (Figura 3.4). [13] [33] [35].

A solução de Schwarzschild é expressa pela métrica:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{C^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2,} \quad (3.67)$$

onde o termo  $\frac{2GM}{c^2}$  é conhecido como o raio de Schwarzschild [33].

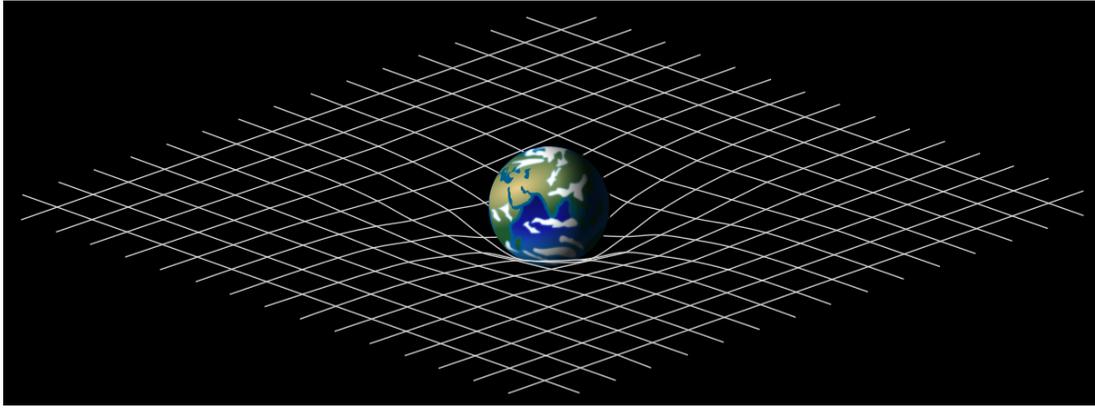


Figura 3.4: Representação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de massa.  
 Fonte: Site: Wikimedia Commons [38].

### 3.6.1 Periélio de Mercúrio

A métrica de Schwarzschild desempenha um papel crucial na explicação de fenômenos gravitacionais que não podem ser previstos pela teoria newtoniana, como a precessão do periélio de Mercúrio [13].

Com o avanço da TRG, verificou-se que, devido à proximidade de Mercúrio ao Sol, onde os efeitos gravitacionais relativísticos tem mais efeito, o avanço de seu periélio seria maior do que o estimado pela gravitação clássica. Portanto, a métrica de Schwarzschild foi utilizada para calcular com precisão essa precessão adicional [39]. A concordância entre os valores teóricos previstos pela TRG e os dados observacionais foi um dos primeiros testes a corroborar a teoria de Einstein. Para esta análise, utilizaremos as referências [33] [39] [36].

Na mecânica clássica, o movimento de um corpo em órbita é descrito por uma elipse fechada

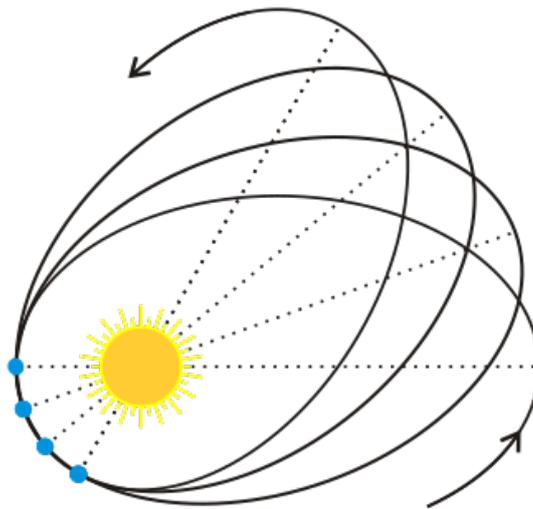


Figura 3.5: Representação do Periélio de Mercúrio  
 Fonte: Site: Wikimedia Commons [40].

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2}(1 + e\cos\phi), \quad (3.68)$$

onde  $\phi$  é o azimute. Para obter a equação relativística, temos que utilizar as equações  $r^2\dot{\phi} = L$ , uma expressão conservativa do momento angular de uma partícula em movimento ao redor de um corpo massivo, e  $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Phi_{eff}(r) = \epsilon$ , a equação de energia efetiva para a partícula, que resulta em:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2\left(1 + \frac{c^2}{L^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - \frac{c^2E^2}{L^2}r^4 = 0. \quad (3.69)$$

Considerando  $u = L^2/(GMr)$ , a equação pode ser escrita como

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2G^2M^2}{L^2c^2}u^3 + u^2 - 2u = \frac{2L^2\epsilon}{G^2M^2} \quad (3.70)$$

derivando em  $\phi$ ,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{3G^2M^2}{L^2c^2}u^2 + u - 1 = 0. \quad (3.71)$$

A equação pode ser tratada como uma perturbação na equação Newtoniana, desde que  $u = 1$ . Considerando que  $u_0$  corresponde à solução de Newton e  $u_p$  uma perturbação,

$$u = u_0 + u_p. \quad (3.72)$$

Então, a equação (3.71) pode ser separada em duas equações, uma para o termo  $u_0$  e outra para  $u_p$

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 - 1 = 0, \quad (3.73)$$

em que sua solução é a equação da elipse, e

$$\frac{d^2u_p}{d\phi^2} + u_p = \frac{3G^2M^2}{L^2c^2}u_0^2, \quad (3.74)$$

que pode ser substituída a solução para  $u_0$ :

$$u_p = \frac{3G^2M^2}{L^2c^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6}e^2 \cos 2\phi \right\}. \quad (3.75)$$

O primeiro e o segundo termo podem ser desconsiderados no cálculo, pois o primeiro é uma constante e o terceiro oscila em torno da origem [36]. Considerando apenas o segundo termo:

$$u = 1 + e \cos \phi + 3e \frac{G^2M^2}{L^2c^2} \phi \sin \phi, \quad (3.76)$$

com  $\sigma = 3G^2M^2/L^2c^2$ . O período da órbita pode ser aproximado por uma expansão binomial:

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{3G^2M^2}{L^2c^2}\right), \quad (3.77)$$

então, o avanço do periélio é representado pela equação

$$\boxed{\delta\phi = \frac{6\pi G^2M^2}{L^2c^2}}. \quad (3.78)$$

Como o  $L^2 \approx GMa(1 - e^2)$ , a equação torna-se

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (3.79)$$

Utilizando os valores de Mercúrio, descritos pela Nasa [39], a precessão do periélio é

$$\delta\phi \approx 0,1036s. \quad (3.80)$$

Como o período de translação de Mercúrio é de 88 dias, dessa forma, o semi-eixo maior do planeta avança 43 segundos por século, valor exato que Einstein detectou [39].

Embora o efeito seja mais significativo para Mercúrio, fenômenos semelhantes foram posteriormente detectados em outros planetas, como Vênus além de estrelas próximas de buracos negros [33].

### 3.6.2 Velocidade de Escape na Relatividade

A velocidade de escape em um buraco negro deve ser maior que a velocidade da luz. No entanto, de acordo com a TRG, nenhuma partícula ou sinal pode atingir essa velocidade no espaço-tempo, tornando impossível escapar de um buraco negro.

A equação da velocidade de escape no formalismo clássico é representada por:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad (3.81)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do buraco negro e  $r$  é a distância do ponto considerado ao centro do buraco negro.

Em um buraco negro, existe uma região limite chamada horizonte de eventos, em que nada pode escapar. Qualquer objeto que ultrapasse essa fronteira será inevitavelmente atraído para o interior do buraco negro.

O horizonte de eventos de um buraco negro esfericamente simétrico, não carregado e não girante, está localizado a uma distância do centro igual ao raio de Schwarzschild, representado por:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3.82)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Substituindo a equação (3.82) na equação da velocidade de escape clássica (3.81) obtém-se:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} = \sqrt{\frac{2GM}{\frac{2GM}{c^2}}} = c. \quad (3.83)$$

O resultado, demonstra que, no horizonte de eventos, a velocidade de escape é exatamente igual à velocidade da luz. Para qualquer ponto no interior do horizonte de eventos, a velocidade de escape seria maior que  $c$ , o que impossibilita escapar do buraco negro, conforme previsto pela relatividade geral.

### 3.6.3 Sistema de Posicionamento Global(GPS)

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é uma tecnologia essencial para o mundo moderno, com aplicações desde a navegação em transporte terrestre até estudos meteorológicos. O funcionamento do GPS baseia-se em um sistema de satélites que emitem sinais de rádio, cujo tempo de propagação é medido com precisão por meio de relógios atômicos [41]. Esses relógios requerem correções relacionadas aos efeitos da dilatação do tempo. O cálculo da posição é realizado em termo real, considerando os tempos de viagem dos sinais para determinar a distância entre o receptor e os satélites, permitindo a localização exata em qualquer ponto da Terra. Atualmente, o GPS opera com 31 satélites ativos, projetada para 24 satélites funcionarem, eles estão distribuídos em 6 planos orbitais igualmente espaçados e a altitude média dos satélites é de cerca de 20.200 km acima da Terra [42]. Cada satélite completa uma órbita cerca de 11 horas e 58 minutos de tempo solar médio [41].

Para calcular a precessão de satélites podemos utilizar a equação (3.79) com os valores:

$$M = 5,97 \times 10^{24}kg;$$

$$a = 2,65 \times 10^9cm.$$

e a excentricidade inicial  $e = 0,00$ . Temos o resultado:

$$= 3,14 \times 10^{-16}radianos/órbita \quad (3.84)$$

que por arcosegundos por século:

$$= 4,72 \times 10^{-6}"/sec. \quad (3.85)$$

Um dos desafios do GPS é a precisão dos relógios. Os satélites utilizam relógios atômicos de alta precisão, enquanto os relógios dos receptores possuem uma precisão muito menor. Assim, a TRG é essencial para que o sistema de GPS mantenha um erro de localização menor do que 1 metro [42]. Para garantir que os relógios dos satélites estejam sincronizados, é necessário aplicar as correções relativísticas para efeitos gravitacionais quanto para os efeitos de velocidade [41].

Para resolver a imprecisão dos relógios nos receptores de GPS, considere um sistema de equações que descreve a multilateração do GPS [41]:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2, \quad (3.86)$$

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z + d_{12} = 0, \quad (3.87)$$

$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z + d_{13} = 0, \quad (3.88)$$

$$2(x_1 - x_4)x + 2(y_1 - y_4)y + 2(z_1 - z_4)z + d_{14} = 0. \quad (3.89)$$

Elas devem ser reescritas para um desvio  $\sigma$ , relacionado à imprecisão dos relógios dos receptores. Portanto, temos as equações

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t'_1 + \sigma - t_1)^2, \quad (3.90)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t'_2 + \sigma - t_2)^2, \quad (3.91)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t'_3 + \sigma - t_3)^2, \quad (3.92)$$

$$(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t'_4 + \sigma - t_4)^2. \quad (3.93)$$

Os termos  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  são os tempos registrados pelos relógios do receptor, que são diferentes dos tempos dos satélites. Esse novo sistema de equações resulta em duas soluções possíveis. Caso o sistema GPS não consiga determinar a localização do receptor, o uso de um satélite adicional pode ser necessário para remover a ambiguidade e fornecer uma única solução válida para a posição [41].

## Correção Relativística

A precisão do sistema de GPS não depende apenas da determinação das distâncias entre o receptor e os satélites. Para ajustar os relógios atômicos, estão associadas à relatividade restrita e a geral [13].

O efeito doppler é causado pela velocidade orbital dos satélites. Embora a velocidade dos satélites seja pequena em relação a velocidade da luz, ela é significativa para afetar a precisão dos intervalos de tempo dos relógios atômicos nos satélites. A velocidade do satélite altera a frequência de oscilação de seus relógios que pode ser representado na equação da dilatação temporal

$$\Delta\tau_v = \Delta t \left[ 1 - \frac{1}{2}(V/c)^2 \right], \quad (3.94)$$

onde  $\Delta\tau_v$  é o tempo do satélite,  $\Delta t$  corresponde ao tempo medido por um observador em repouso em um referencial inercial longe de qualquer efeito gravitacional.

A equação descreve que os relógios nos satélites atrasam em relação aos relógios em repouso na Terra devido ao movimento orbital.

Os satélites também estão sujeitos a efeitos gravitacionais, devido a altitude de 20.200km acima da Terra, que de acordo com a TRG a gravidade afeta a passagem do tempo. A partir da métrica de Schwarzschild, podemos observar como o tempo no campo gravitacional de um satélite é diferente do tempo em um referencial distante [41].

A energia de um fóton, que é transmitido pelos satélites para os receptores de GPS pode ser representada pela equação

$$P^0 = \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.95)$$

e

$$E = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \frac{dt}{d\lambda}. \quad (3.96)$$

Ao comparar a energia de um fóton emitido a uma distância  $r$  do centro da Terra com a energia de um fóton muito longe do campo gravitacional, temos:

$$\frac{E_r}{E_\infty} = \frac{h\nu_r}{h\nu_\infty} = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.97)$$

onde  $\nu_r$  e  $\nu_\infty$  são frequências do fóton no campo gravitacional e no referencial distante. Como  $\nu_r = \Delta\tau_g$  e  $\nu_\infty = \Delta t$  e o termo  $GM/c^2r$  é muito pequeno, temos a simplificação:

$$\Delta\tau_g = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right) \Delta t. \quad (3.98)$$

A passagem do tempo é alterada pelos fatores  $\left[ 1 - \frac{1}{2}(V/c)^2 \right]$  e  $\left( 1 - \frac{GM}{c^2r} \right)$ . Isso implica que a alteração da passagem do tempo será:

$$\Delta\tau = c \left[ 1 - \frac{1}{2}(V/c)^2 \right] \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right) \Delta t. \quad (3.99)$$

Considerando que as duas contribuições acima são muito pequenas

$$\Delta\tau = c \left[ 1 - \frac{1}{2}(V/c)^2 - \frac{GM}{c^2 r} \right] \Delta t. \quad (3.100)$$

Agora é possível comparar a passagem do tempo dos relógios dos satélites com os relógios na Terra, utilizando a razão entre os tempos  $\Delta\tau_{sat}$  e  $\Delta\tau_{Ter}$ :

$$\frac{\Delta\tau_{sat}}{\Delta\tau_{Ter}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_{sat}}{c} \right)^2 - \frac{GM}{c^2 r}}{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_{Ter}}{c} \right)^2 - \frac{GM}{c^2 R}}, \quad (3.101)$$

onde  $r$  é a distância do satélite até o centro da Terra e  $R$  é o raio da Terra.

Substituindo os valores numéricos:

$$V_{sat} = 4,00 \times 10^3 m/s,$$

$$V_{Ter} = 4,65 \times 10^2 m/s,$$

$$M = 5,97 \times 10^{24} kg,$$

$$r = 2,64 \times 10^7 m,$$

$$R = 6,73 \times 10^6.$$

Temos:

$$\frac{\Delta\tau_{sat}}{\Delta\tau_{Ter}} = 1 + 4,40 \times 10^{-10}. \quad (3.102)$$

O resultado mostra que, para o caso idealizado considerado, os relógios dos satélites experimentam uma taxa de passagem do tempo mais rápida em comparação aos relógios na Terra. A diferença é de  $4,40 \times 10^{-10}$ . Para um dia de 24 horas, resulta em uma diferença:

$$4,40 \times 10^{-10} \times 24 \times 60 \times 60 = 3,80 \times 10^{-5} s. \quad (3.103)$$

Considerando que qualquer erro maior que  $4,00 \times 10^{-9} s$  resulta em uma imprecisão de 1 metro na localização. A imprecisão seria de:

$$(3,80 \times 10^{-5} s) \times (3 \times 10^5 m/s) = 11,4 km. \quad (3.104)$$

Isso demonstra a importância de corrigir os efeitos para manter a precisão do GPs dentro dos limites aceitáveis.

Em um caso real, os satélites seguem órbitas elíptica, além disso, o formato da Terra não é esférico. Essas variações podem alterar a precisão da sincronização dos relógios dos satélites e os na Terra, contudo as correções relativísticas continuam sendo fundamentais para o funcionamento preciso do sistema de GPS [41].

## 3.7 Futuro da Gravitação

A compreensão da gravitação avançou com a Teoria da Relatividade Geral, que se revelou bem-sucedida ao descrever fenômenos em grande escala, como a dinâmica das estrelas, galáxias e até mesmo a expansão do Universo. No entanto, a TRG não é uma teoria unificada da gravitação, pois não consegue descrever os fenômenos gravitacionais de maneira eficaz em escalas microscópicas [12]. Isso ocorre porque a TRG não incorpora os princípios da mecânica quântica, que são essenciais para descrever o comportamento de partículas subatômicas. Contudo, a detecção das ondas gravitacionais permite observar os fenômenos cósmicos e testar as previsões da relatividade em regimes extremos. Essa descoberta pode fornecer pistas para a unificação das teorias da gravitação e da mecânica quântica.

Dentre as várias tentativas de unificação, destaca-se a Teoria das Cordas [43], que propõe que as partículas fundamentais não são pontos, mas cordas vibrantes, que poderiam vibrar em diferentes frequências. Dentro do contexto da Teoria das Cordas, surge a chamada Teoria M, uma versão com o objetivo de unificar as forças fundamentais. De acordo com Hawking [43], a Teoria M poderia fornecer uma Teoria de Tudo. Essa teoria sugere que o universo possui 11 dimensões, sendo que as dimensões extras são compactadas e extremamente pequenas, o que explicaria por que não conseguimos observá-las diretamente no cotidiano.

Hawking [43] também destacou que a Teoria M não se limita a cordas, mas introduz o conceito de branas, objetos multidimensionais que podem ter várias dimensões espaciais. Essas branas seriam entidades fundamentais que poderiam interagir de maneiras complexas.

Entretanto, a Teoria M é apenas uma hipótese teórica, e como outras teorias especulativas, ainda carece de evidências experimentais para sua confirmação. No entanto, ela exemplifica como a gravitação continua a ser um campo de pesquisa ativa, com muitos desafios em aberto. Se algumas dessas teorias forem comprovadas, elas poderiam abrir portas para uma nova era de compreensão do Universo.

# Considerações Finais

Neste trabalho foi possível realizar uma ampla revisão histórica da gravitação, abrangendo desde os primórdios na Antiguidade até o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. Ademais, foi conduzido um estudo da teoria newtoniana, na qual suas limitações mostraram que a Teoria da Relatividade Geral era superior. Por fim, foi realizado um estudo da Relatividade Geral destacando sua relevância e os estudos em aberto na gravitação. Este trabalho permitiu reforçar que os avanços da gravitação não foi trabalho de uma única mente brilhante, mas sim do esforço coletivo de diversos filósofos e cientistas, cujas contribuições gradualmente moldaram o conceito de gravitação como o entendemos hoje, e que, mesmo com teorias robustas, há ainda questões a serem exploradas na gravitação.

# Referências Bibliográficas

- [1] K. de Souza Oliveira Filho and M. de Fátima Oliveira Saraiva, *Astronomia e Astrofísica*. LF editorial, 2014.
- [2] R. Panek, *The trouble with gravity: solving the mystery beneath our feet*. Mariner Books, 2019.
- [3] C. M. Porto, “A física de Aristóteles: uma construção ingênua?,” *Revista Brasileira de Ensino de Física v.31 n.4*, 2009.
- [4] F. Damasio., “O início da revolução científica: questões acerca de copérnico e os epiciclos, kepler e as órbitas elípticas,” *Revista Brasileira de Ensino de Física v. 33 n.3*, 2011.
- [5] S. Weinberg, *Para explicar o mundo: A descoberta da ciência moderna*. Companhia das Letras, 2015.
- [6] L. R. Evangelista, *Perspectiva em História da Física - dos Babilônios à Síntese Newtoniana*. Ciencia Moderna, 2011.
- [7] S. Hawking, *On the shoulders of Giants: the great works of physics and astronomy*. Philadelphia: Running Press, 2002.
- [8] A. Fraknoi and D. Morrison, “Astronomy.” Openstax. <<https://openstax.org/books/astronomy/pages/2-4-the-birth-of-modern-astronomy>> Acesso em: 10 Dez. 2024.
- [9] M. R. Bento, “A Física de Copérnico,” Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. 40 f. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/236343/001137423.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> Acesso em: 11 Dez. 2024.
- [10] J. Kepler, “Mysterium cosmographicum.” Wikimedia Commons, 1596. Disponível em: <[urlhttps://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler\\_Mysterium\\_platonic\\_solids.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_Mysterium_platonic_solids.jpg)> Acesso em : 23 Dez. 2024.
- [11] M. A. Garms and I. L. Caldas, “Síntese das Leis de Kepler,” *Revista Brasileira de Ensino de Física v. 40*, 2017.
- [12] A. S. T. Pires, *Evolução das Ideias da Física*. LF Editorial, 2011.
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Willey & Sons(Print-On-Demand), 1972.

- [14] R. S. Westfall, *A Vida de Isaac Newton*. Nova Fronteira, 1995.
- [15] R. de Andrade Martins, “A MAÇÃ DE NEWTON: História, Lendas e Tolices,” *GHTC usp*, 2006.
- [16] D. McKie and G. R. D. Beer, “Newton’s apple,” *Notes and Records of the Royal Society*, 1951.
- [17] I. B. Cohen., *Newton: textos, antecedentes e comentários*. Rio de Janeiro: EdUERJ/Contraponto, 2002.
- [18] R. de Andrade Martins, *A Origem Histórica da Relatividade Especial*. Livraria da Física, 2015.
- [19] S. R. Dahmen, “Relatividade Geral: Teoria e Aplicações.” Notas de Aula, 2022.
- [20] J. Castiñeiras and L. C. B. Crispino, “Relatividade Geral: fundamentos e primeira comprovação experimental,” *Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência*, 2019.
- [21] Brito and Irene, “As equações de campo da gravitação, A, Einstein, Atas da Academia Prussiana das Ciências de Berlim..” tradução de "Die feldgleichungen der gravitation", 2015.
- [22] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Mecânica(Vol.1)*. Blucher, 2015.
- [23] K. R. Symon, *Mecânica*. Campus Editora rJ, 1996.
- [24] D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 1st edition, 2008.
- [25] L. D. de Souza, “Cônicas e suas propriedades notáveis,” dissertação(mestrado em matemática), Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. 66 f. Disponível em: <|url=https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128599> Acesso em: 29 Nov. 2024.
- [26] M. Mathematicae. Wikimedia Commons, 2012. Disponível em: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Conic\\_Sections.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Conic_Sections.svg)> Acesso em: 14 Dez. 2024.
- [27] C. Poole, H. Goldstein, and J. Safko, *Classical Mechanics: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited; 3º edição, 2013.
- [28] B. Brondel. Wikimedia Commons, 2010. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton\\_Cannon.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton_Cannon.svg)> Acesso em: 23 Dez. 2024.
- [29] Hawesthoughts. Wikimedia Commons, 2023. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Celestial\\_poles\\_and\\_equator.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Celestial_poles_and_equator.svg)> Acesso em: 23 Dez. 2024.
- [30] R. Burnham. Wikimedia Commons, 1978. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Orbit\\_of\\_Sirius\\_A\\_and\\_B\\_\(2000-0065-more-2\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Orbit_of_Sirius_A_and_B_(2000-0065-more-2).jpg)> Acesso em: 23 Dez. 2024.

- [31] L. Thorndike, *A History of Magic and Experimental Science*. Columbia University Press, 1958.
- [32] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [33] S. M. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [34] J. Natario, *General relativity without calculus: a concise introduction to the geometry of relativity*. Springer Science Bussines Media, 2011.
- [35] T. M. Ornellas, “Um Estudo da Teoria de Campo Gravitacional de Einstein,” Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física), Universidade Estadual de Maringá, 2023. 42 f.<[http://www.dfi.uem.br/fisica/wp-content/tcc/2022-2023/Bacharelado/Thais%20Mikami%20Ornellas%20TCC%20Bacharelado%202022\\_2023.pdf](http://www.dfi.uem.br/fisica/wp-content/tcc/2022-2023/Bacharelado/Thais%20Mikami%20Ornellas%20TCC%20Bacharelado%202022_2023.pdf)> Acesso em: 10 Dez. 2024.
- [36] M. R. Pelicer, “Cálculo Tensorial e Relatividade Geral,” Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física), Universidade Estadual de Maringá, 2016. 74 f. Disponível em: <<http://www.dfi.uem.br/fisicaold/site.dfi.uem.br/wp-content/uploads/2018/01/TCC-Bacharelado-Mateus-Reinke-Pelicer.pdf>> Acesso em: 10 Dez. 2024.
- [37] F. the Oyster. Wikimedia Commons, 2014. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel\\_Transport.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_Transport.svg)> Acesso em: 23 Dez. 2024.
- [38] AllenMc. Wikimedia Commons, 2008. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flamm.jpg>> Acesso em: 23 Dez. 2024.
- [39] F. J. de Almeida Gama, R. P. Braga, and E. Cunha, “Precessão do periélio de mercúrio,” *Sociedade Astronômica do Recife*, 2010.
- [40] Mpfiz. Wikimedia Commons, 2010. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion\\_precession.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion_precession.svg)>. Acesso em: 23 Dez. 2024.
- [41] J. Natário, “O GPS e a Teoria da Relatividade,” *Universidade de Lisboa*, 2013.
- [42] D. A. Santana, “A Teoria da Relatividade e o Sistema de Posicionamento Global(GPS),” Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física), Universidade Federal do Espírito Santo, 2022. 53 f.<[https://fisica.saomateus.ufes.br/sites/fisica.saomateus.ufes.br/files/field/anexo/tcc\\_denis\\_apolonio\\_santana.pdf](https://fisica.saomateus.ufes.br/sites/fisica.saomateus.ufes.br/files/field/anexo/tcc_denis_apolonio_santana.pdf)> Acesso em: 20 Dez. 2024.
- [43] S. Hawking, *O universo numa casca de noz*. Intrínseca 1ªed., 2016.